UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

AUG 22 1919

Publicación hecha bajo los auspicios de la Secretaría de Instrucción Pública y Bellas Artes.

UNIVERSITY OF ILLINOIS

# LECCIONES DE TERMODINAMICA

DADAS EN LA CLASE DE

Segundo Curso de Mecánica Aplicada

DE LA

ESCUELA N. DE INGENIEROS

ESCUELA N. DE INGS.
DIRECCION
MEXICO

EN LOS AÑOS DE 1908-1909

POR EL PROFESOR

PEDRO C. SANCHEZ

REMOTE STORAGE

MEXICO.

TIPOGRAFÍA ECONÓMICA.—2ª CALLE DE SAN LORENZO NÚM. 32.

1910.

SHOUT
SHARE
IT

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Publicación hecha bajo los auspicios de la Secretaría de Instrucción Pública y Bellas Artes.

# LECCIONES DE TERMODINAMICA

DADAS EN LA CLASE DE

Segundo Curso de Mecánica Aplicada

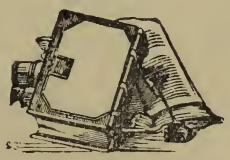
DE LA

ESCUELA N. DE INGENIEROS

EN LOS AÑOS DE 1908-1909

POR EL PROFESOR

**PEDRO C. SANCHEZ**



MEXICO.

TIPOGRAFÍA ECONÓMICA.—2ª CALLE DE SAN LORENZO NÚM. 32.

1910.

536.7
Sa5l
REMOTE STORAGE

# Lecciones de Termodinámica

1. La termodinámica, independientemente de toda hipótesis sobre la naturaleza del calor, estudia sus efectos al obrar sobre los cuerpos, relacionándolos á los principios elementales de la Mecánica.

Sus desarrollos tienen por base dos principios fundamentales, de carácter netamente experimental: uno expresa la relación que existe entre el trabajo mecánico y el calor considerado á la vez como fuerza y como cantidad capaz de aumentar y disminuir; el otro expresa la relación que existe entre el trabajo mecánico, las cantidades de calor y la temperatura á la cual el trabajo ó el calor han sido producidos ó gastados.

Aceptaremos por unidad de trabajo el kilográmetro ó el trabajo necesario para elevar un kilogramo á un metro de altura en un segundo; y por unidad de calor la caloria ó la cantidad de calor necesaria para elevar un grado la temperatura de un kilo de agua tomada á cero grados.

El primer principio conocido con el nombre de Mayer y Joule puede enunciarse así:

Calor y trabajo son cantidades equivalentes: es decir, siempre que un cuerpo produce ó sufre un trabajo, desaparece calor ó bien aparece, existiendo una relación única y constante entre las cantidades de trabajo y de calor que depende unas de otras.

Experiencias muy numerosas y variadas se han hecho por hábiles físicos para encontrar cuántas unidades de trabajo equivalen á una unidad de calor, así como para la determinación de la relación inversa ó el equivalente calorífico del trabajo.

Si bien no todas las experiencias podían dar el dato numérico con la precisión deseada, todas indicaban sin dejar lugar á duda la constancia de dicha relación, y el valor numérico de las experiencias semejantes difiere bastante poco para poder aceptar con Zeuner como valor más probable del equivalente mecánico del calor el número 424, los valores extremos encontrados por los experimentadores siendo 420 y 440.

## ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA MECÁNICA DEL CALOR.

2. Cuando un cuerpo sometido á la acción del calor está en reposo, su estado queda determinado por el conocimiento de su peso, volumen y presión que soporta; mas en lo sucesivo, para mayor simplicidad, supondremos que se trata siempre de la unidad de peso del cuerpo, ó bien de un kilo, no necesitándose ya, por lo mismo, para definir su estado, sino conocer su volumen y presión soportada. El volumen de la unidad de peso ó volumen específico, será designado por $v$, V representando el volumen de un peso cualquiera.

Admitiremos que la presión obra uniformemente sobre todo el cuerpo y normalmente á su superficie, y designaremos por $p$ la presión específica, ó presión por unidad de superficie.

Esto supuesto, si suministramos á la unidad de peso de un cuerpo la cantidad de calor infinitamente pequeña $d\,Q$, el estado del cuerpo sufrirá los cambios siguientes:

1º El movimiento molecular del cuerpo habrá aumentado. correspondiendo un aumento en su fuerza viva, y de aquí un trabajo elemental que designaremos por $d\,W$.

2º Las posiciones medias de las moléculas habiendo cambiado, corresponde esto á un trabajo que llamaremos $d\,J$.

3º Su volumen habrá cambiado igualmente, verificándose un trabajo externo que llamaremos $d\,L$.

Según el principio que acabamos de enunciar estas cantidades están ligadas entre sí por la siguiente ecuación

$$d\,Q = \frac{1}{424}\,(d\,W + d\,J + d\,L)$$

y designando por A el equivalente calorífico del trabajo

$$d\,Q = A\,(d\,W + d\,J + d\,L) \qquad (1)$$

La ecuación (1) solo es verdadera para un cuerpo en reposo; $d\,Q$ es positiva si se suministra calor, y negativa si se quita ó si el cuerpo cede calor; A $d$W representa el calor sensible al termómetro y A $d$J el calor no aparente ó gastado en el trabajo de desagregación.

Se acostumbra poner

$$d\,U = d\,W + d\,J$$

teniéndose entonces

$$d\,Q = A(d\,U + d\,L) \qquad (2)$$

U representa pues el trabajo total que ha sido producido durante la introducción del calor en el interior del cuerpo, y llamaremos á U "trabajo interior," trabajo que no puede ser conocido directamente, pero que eliminaremos en los desarrollos sucesivos.

Es indudable que U es una función de $(p\ v)$ pudiendo escribir

$$U = F\,(p\ v),$$

que diferenciada da

$$d\,U = \left(\frac{d\,U}{d\,p}\right)\,dp + \left(\frac{d\,U}{d\,v}\right)d\,v$$

Si hacemos

$$\frac{d\,U}{d\,p} = X \quad y \quad \frac{d\,U}{d\,v} = Z,$$

tendremos

$$d\,U = X\,d\,p + Z\,d\,v \qquad (3)$$

Ecuación que da la variación del trabajo interno correspon-

diendo á un incremento infinitamente pequeño de la presión y del volumen del cuerpo.

La ecuación (3) siendo una diferencial exacta, deberemos tener según las reglas del cálculo diferencial

$$\frac{d\,X}{d\,v} = \frac{d\,Z}{d\,p} \tag{4}$$

El trabajo exterior podemos valuarlo como sigue:

Si $d\,\omega$ es un elemento de superficie, la presión será $p\ d\omega$ y si el desalojamiento lineal es $d\,s$, el trabajo será $p\,d\,\omega\,d\,s$; pero $d\,\omega\,d\,s = d\,v$ el elemento de volumen, luego

$$d\,\mathrm{L} = p\,dv \tag{5}$$

Sustituyendo este valor en la (2), tendremos

$$d\,\mathrm{Q} = \mathrm{A}\,(d\,\mathrm{U} + p\,dv) \tag{6}$$

Si el estado inicial de un cuerpo lo indicamos por el índice 1 y el final por el índice 2, obtendremos por la integración de la (6)

$$\mathrm{Q} = \mathrm{A\ F}\,(p_2\ v_2) - \mathrm{A\ F}\,(p_1\ v_1) + \int_{v_1}^{v_2} p\,d\,v \tag{7}$$

El último término del segundo miembro es indeterminado mientras no se sepa cómo varía la presión cuando cambia el volumen; y la ecuación (6) no será una diferencial exacta é integrable sino cuando se conozca una relación entre $p$ y $v$.

Para obtener una relación entre estas cantidades pueden hacerse infinidad de hipótesis, pero aquí solo estudiaremos las tres siguientes que tienen un verdadero interes.

1ª Supondremos que al suministrar calor á un cuerpo la presión permanece constante; y en este caso

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,d\,v = p\int_{v_1}^{v_2} d\,v = p\,(v_2 - v_1)$$

2ª Admitiremos que el volumen permanece constante, lo que exige naturalmente que el trabajo exterior sea nulo, empleándose todo el calor en aumentar el trabajo interno.

3ª Admitiremos que el cambio de estado se verifique sin que haya ganancia ni pérdida de calor, y en este caso $dQ = 0$; y la (6) da

$$p\,dv = -\,dU,$$

ó integrando

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = F(p_1v_1) - F(p_2v_2),$$

ecuación que demuestra que el trabajo exterior es igual á la variación del trabajo interior. La curva que en este caso indica cómo varía $p$ cuando cambia $v$ ha sido llamada por Rankine "curva adiabática."

Continuando en esta hipótesis, pongamos en la (3) por $dU$ el valor encontrado, y tendremos

$$-\,p\,dv = X\,dp + Z\,dv$$

ó

$$X\,dp = -\,(Z + p)\,dv;$$

y la integración de esta ecuación nos daría la ecuación de la línea adiabática.

Si durante el cambio de estado, el trabajo interior permanece constante, $dU = 0$ y la (3) da

$$0 = X\,dp + Z\,dv,$$

cuya integración nos daría la ecuación de la curva llamada por Mr. Cazin curva isodinámica; y como en este caso la (6) da

$$dQ = A\,p\,dv.$$

se sigue que todo el calor introducido ha sido transformado en trabajo exterior.

Debemos advertir que hemos supuesto los cambios de estado reversibles, es decir, que volviendo á los volúmenes primitivos se encontrarán también las presiones iniciales, y para esto hay necesidad de suponer que hay igualdad entre la presión exterior y la fuerza expansiva del cuerpo.

3. ESTABLECIMIENTO DE LA PRIMERA ECUACIÓN FUNDAMENTAL.

Si en la ecuación

$$d\,Q = A\,(d\,U + d\,L),$$

ponemos por

$$d\,U = X\,d\,p + Z\,dv$$

y por

$$d\,L = p\,dv,$$

tendremos

$$d\,Q = A\,[X\,d\,p + (Z + p)\,d\,v];$$

y si hacemos

$$Z + p = Y \tag{8}$$

$$d\,Q = A\,(X\,d\,p + Y\,d\,v) \tag{9}$$

X é Y siendo funciones de $p$ y $v$.

Diferenciando la (8) con relación á $p$ tendremos

$$\frac{d\,Z}{d\,p} + 1 = \frac{d\,Y}{d\,p}$$

ó

$$\frac{d\,Y}{d\,p} - \frac{d\,Z}{d\,p} = 1;$$

más como según la (4)

$$\frac{d\,X}{d\,v} = \frac{d\,Z}{d\,p},$$

$$\frac{d\,Y}{d\,p} - \frac{d\,X}{d\,v} = 1 \qquad (I)$$

Ecuación que demuestra que la (9) no es una diferencial exacta, y que no podrá integrarse sin conocer otra relación entre sus cantidades; ó bien, que no es posible conocer el calor que se suministra á un cuerpo, por el solo conocimiento de sus estados inicial y final, sino que es indispensable conocer la manera como ha pasado de un estado á otro, ó cómo varían la presión y volumen al verificarse el cambio de estado.

## 4. SEGUNDA ECUACIÓN FUNDAMENTAL.

Acabamos de ver que la ecuación (9) no es integrable sino en determinadas condiciones. Designaremos por S una nueva función de $(p,\ v)$ por lo pronto desconocida, y multipliquemos y dividamos por ella el 2º miembro de la (9), con lo que tendremos

$$d\,Q = A\,S\left(\frac{X}{S}\,d\,p + \frac{Y}{S}\,d\,v\right) \qquad (10)$$

Elijamos á S de manera que el factor entre paréntisis sea integrable, ó lo que es lo mismo que sea el factor de integrabilidad, quedando así bien definida la función S.

Puesto que la (10) es ya una diferencial exacta, tendremos:

$$d\,\frac{\frac{X}{S}}{d\,v} = \frac{d\,\frac{Y}{S}}{d\,p},$$

ó efectuando la diferenciación

$$S\,\frac{d\,X}{d\,v} - X\,\frac{d\,S}{d\,v} = S\,\frac{d\,Y}{d\,p} - Y\,\frac{d\,S}{d\,p},$$

ó

$$S\left(\frac{d\,X}{d\,v} - \frac{d\,Y}{d\,p}\right) = X\,\frac{d\,S}{d\,v} - Y\,\frac{d\,S}{d\,p},$$

ecuación que según la primera ecuación fundamental (I) se transforma en

$$S = Y \frac{d S}{d p} - X \frac{d S}{d v} \qquad (II)$$

siendo esta la segunda ecuación fundamental de la teoría mecánica del calor.

Puesto que S es una función de $(p\ v)$, tendremos

$$d S = \frac{d S}{d p} d p + \frac{d S}{d v} d v \qquad (11)$$

La ecuación (9) podemos escribirla de varias maneras que nos serán útiles en lo sucesivo.

Si eliminamos á Y por medio de la (II), tendremos

$$d Q = A \left( X d p + \frac{S + X \frac{d S}{d v}}{\frac{d S}{d p}} d v \right)$$

ó

$$d Q = \frac{A}{\frac{d S}{d p}} \left( X \frac{d S}{d p} d p + X \frac{d S}{d v} d v + S d v \right)$$

ó según la (11)

$$d Q = \frac{A}{\frac{d S}{d p}} (X d S + S d v)$$

De igual manera obtendríamos

$$d Q = A \left( \frac{Y \frac{d S}{d p} - S}{\frac{d S}{d v}} d p + Y d v \right)$$

ó

$$d\,Q = \frac{A}{\frac{d\,S}{d\,v}}\,(Y\,d\,S - S\,d\,p)$$

Reuniremos en un grupo estas tres interesantes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} d\,Q &= A\,(X\,d\,p + Y\,d\,v) \\ d\,Q &= \frac{A}{\left(\frac{d\,S}{d\,p}\right)}\,(X\,d\,S + S\,d\,v) \\ d\,Q &= \frac{A}{\left(\frac{d\,S}{d\,v}\right)}\,(Y\,d\,S - S\,d\,p) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

## CICLOS DE OPERACIONES SIMPLES Y REVERSIBLES.

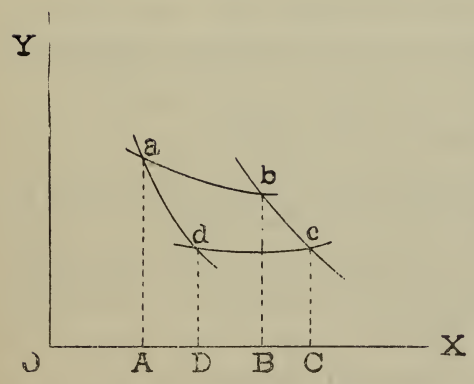



Fig. 1.

Sean (Fig. 1) dos ejes rectangulares (X Y); si llevamos sobre el eje de las X los volúmenes y sobre el de las Y las presiones, puesto que según hemos dicho anteriormente el volumen y la presión caracterizan el estado de un cuerpo, el punto $a$ marcará su estado inicial, bien definido por su volumen $o\,A = v_1$ y su presión $A\,a = p_1$. Supongamos que suministramos al cuerpo la cantidad de calor $Q_1$ que podemos calcular por la fórmula (2)

$$d\,Q = A\,(d\,U + d\,L).$$

Para integrar esta ecuación representemos por $U_1$ el trabajo interno en el estado $a$, por $U_2$ en $b$, por $U_3$ en $c$ y por $U_4$ en $d$; siendo evidente que al volver el cuerpo al estado $a$, su trabajo interno será $U_1$; y como al suministrarle calor en el trayecto $a\,b$, $p$ y $v$ varían según la curva $a\,b$, cuya ecuación, sin afectar en nada la generalidad, puede suponerse ser $S = F(p\,v) =$ constante, la integral será

$$Q_1 = A\,(U_2 - U_1 + L_1).$$

Como el trabajo externo es $d\,L = p\,d\,v$, es indudable que L. es el area $A\,a\,b\,B$.

Supongamos que al llegar el cuerpo á $b$, continúe según la rva $b\,c$ cuya ecuación sea

$$R = \phi\,(p\,v)$$

suministrándole la cantidad de calor

$$Q_2 = A\,(U_3 - U_2 + L_2);$$

que al llegar á $c$ deba volver á su estado inicial, recorriendo la curva $c\,d$ de la misma especie que S, quitándole la cantidad de calor

$$-\,Q_3 = A\,(U_4 - U_3 - L_3),$$

$Q_3$ siendo negativo puesto que se quita calor y $L_3$ también negativo puesto que decrece el volumen; y supongamos por último, que al llegar á $d$ vuelva á su estado primitivo $a$ quitándole la cantidad de calor $Q_4$ y siguiendo la curva $d\,a$ de la misma especie que la R debiendo tener

$$-\,Q_4 = A\,(U_1 - U_4 - L_4),$$

advirtiendo que las curvas $a\,b$ y $c\,d$ diferirán solo por una constante, lo mismo que las curvas $b\,c$ y $d\,a$.

Si sumamos estas cuatro ecuaciones, tendremos

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = A\,(U_2 - U_1 + L_1 + U_3 - U_2 + L_2 + \\ + U_4 - U_3 - L_3 + U_1 - U_4 - L_4);$$

y reduciendo

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = A(L_1 + L_2 - L_3 - L_4),$$

siendo evidente según la figura que la suma de las L es el area curvilínea *a b c d*, que representaremos por F, teniéndose

$$Q_1 + Q_2 - (Q_3 + Q_4) = A\,F. \qquad (12)$$

Las modificaciones en el estado de un cuerpo, tal como acaban de ser definidas, han sido llamadas un "ciclo cerrado de operaciones;" y cuando la presión exterior es á cada instante igual á la fuerza expansiva del cuerpo, el ciclo se llama reversible. Cuando solo hay dos pares de curvas el ciclo es simple, en cualquier otro caso es compuesto.

Podemos suponer, sin afectar en nada la generalidad del problema, que las curvas R son adiabáticas, teniendo que hacer $Q_2 = 0$ y $Q_4 = 0$; con lo que la (12) quedará

$$Q_1 - Q_3 = A\,F,$$

y quitando para simplicidad el índice 3

$$Q_1 - Q = A\,F. \qquad (13)$$

Según esto, el cuerpo recorrerá el trayecto *a b c d* recibiendo la cantidad de calor $Q_1$ en la porción *a b* y quitándole la cantidad Q en la porción *c d*, $Q_1$ siendo mayor que Q la cantidad A F, correspondiendo la cantidad de calor desaparecida al trabajo F efectuado y representado por el area curvilínea *a b c d*.

Hemos supuesto que en el trayecto *a b* el cuerpo recibe calor y en el *c d* lo pierde; pero es indispensable indicar en qué condiciones el calor ha sido suministrado y quitado; si suponemos con Carnot que ésto ha tenido lugar á una temperatura constante, el principio que lleva su nombre puede enunciarse así:

"La producción de un trabajo determinado equivale al transporte de una cantidad de calor de un cuerpo á otro cuya temperatura es menor, habiendo desaparecido durante esta operación una cantidad de calor proporcional al trabajo producido."

## 5. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN S.

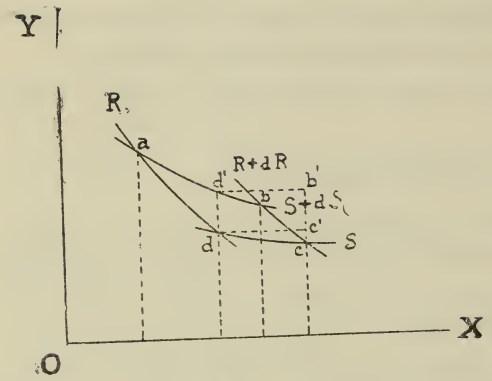



Fig. 2

Supongamos (Fig. 2) el ciclo siguiente, cerrado por las curvas adiabáticas R y R + + $d$ R, y por las curvas S y S + $d$ S, correspondiendo á variaciones infinitamente pequeñas de sus parámetros.

El trabajo efectuado está representado por el area curvilínea $a\,b\,c\,d$, y como corresponde á variaciones infinitamente pequeñas de la presión y del volumen, podemos representarla por $d^2$ F, y equivalente al rectángulo $d\,d'\,b'\,c'$, teniendo por consiguiente

$$d^2\,\mathrm{F} = d\,d' \times d\,c'$$

$d\,c' = d\,v$ y $d\,d'$ es la variación de presión cuando se pasa de S á S + $d$ S, $v$ permaneciendo constante; y como hemos encontrado

$$d\,\mathrm{S} = \frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}\,d\,p + \frac{d\,\mathrm{S}}{d\,v}\,d\,v,$$

para $d\,v = 0$

$$d\,\mathrm{S} = \frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}\,d\,p;$$

de donde

$$d\,p = d\,d' = \frac{d\,\mathrm{S}}{\left(\frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}\right)};$$

y sustituyendo

$$d^2 \mathrm{F} = \frac{d\,\mathrm{S}\,d\,v}{\left(\frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}\right)}. \qquad (14)$$

La 2ª ecuación del grupo (III) que es

$$d\,\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{A}}{\left(\frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}\right)} (\mathrm{X}\,d\,\mathrm{S} + \mathrm{S}\,d\,v)$$

nos permite encontrar $d\,\mathrm{Q}$ en el trayecto $a\,b$ cuando S es constante, pues basta hacer $d\,\mathrm{S} = 0$, con lo que

$$d\,\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{S}\,d\,v}{\frac{d\,\mathrm{S}}{d\,p}} \qquad (15)$$

De estas dos ecuaciones se deduce

$$d^2\,\mathrm{F} = \frac{d\,\mathrm{S}}{\mathrm{A}\,\mathrm{S}}\,d\,\mathrm{Q},$$

ecuación integrable siempre que se suponga que S y $d\,\mathrm{S}$ son cantidades constantes, lo que equivale á admitir que la dilatación sobre el camino $a\,b$ es finita ó que las líneas adiabáticas no son infinitamente próximas.

Integrando tendremos:

$$d\,\mathrm{F} = \frac{d\,\mathrm{S}}{\mathrm{A}\,\mathrm{S}}\,\mathrm{Q} \qquad (16)$$

Si $d\,\mathrm{Q}$ es la cantidad de calor que ha desaparecido, debe tenerse

$$d\,\mathrm{Q} = \mathrm{A}\,d\,\mathrm{F};$$

y en virtud de esta, la (16) se convierte en la siguiente

$$\frac{d\,\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}} = \frac{d\,\mathrm{S}}{\mathrm{S}}$$

é integrando

$$\text{Log nep } Q = \text{Log nep } S + \text{constante},$$

ó

$$\text{Log nep } \frac{Q}{S} = \text{constante ó } \frac{Q}{S} = \text{constante} \qquad (17)$$

Por consiguiente, siempre que se suministre á un cuerpo las cantidades de calor Q, $Q_1$, $Q_2$, en condiciones definidas por las funciones S, $S_1$, $S_2$, debe tenerse,

$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_2}{S_2}$$

Trasformando según esto la ecuación

$$A\,F = Q_1 - Q,$$

tendremos

$$F = \frac{1}{A}(Q_1 - Q) = \frac{Q}{A}\left(\frac{Q_1}{Q} - 1\right) = \frac{Q}{A\,S}(S_1 - S) \qquad (18)$$

ó

$$F = \frac{Q_1}{A\,S_1}(S_1 - S) \qquad (19)$$

Estas ecuaciones demuestran que el trabajo F es proporcional á la diferencia $S_1 - S$ y está en una relación simple con las cantidades de calor suministradas ó quitadas al cuerpo.

Antes de hacer ninguna hipótesis sobre la función S notemos que para un ciclo cerrado, en el que por lo mismo la presión y volumen vuelven á su estado primitivo, debe tenerse

$$\int \frac{d\,Q}{S} = 0 \qquad (20)$$

puesto que la primera ecuación del grupo (III) puede escribirse

$$\frac{d\,Q}{A\,S} = \frac{X}{S}\,d\,p + \frac{Y}{S}\,d\,v;$$

y como $p$ y $v$ vuelven á su estado primitivo

$$\int \frac{d\,Q}{A\,S} = \int \left( \frac{X}{S}\, d\,p + \frac{Y}{S}\, d\,v \right) = 0,$$

ecuación que demuestra la (20) dado que A es constante.

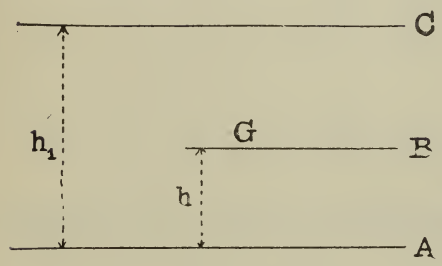



Fig. 3

Para aclarar lo anterior imaginemos tres planos horizontales (Fig. 3), cuyas distancias á partir del primero sean respectivamente 0, $h$, $h_1$. En B se coloca un cuerpo de peso G que al caer al plano A producirá un trabajo

$$G\,h = W \qquad (21)$$

Si elevamos el peso G al plano C debemos gastar el trabajo

$$G\,(h_1 - h) = F \qquad (22)$$

y su caída al plano A nos proporcionaría el trabajo

$$G\,h_1 = W_1 \qquad (23)$$

Las ecuaciones 21 y 23 nos dan

$$G = \frac{W}{h} = \frac{W_1}{h_1} \qquad (24)$$

y según ésta la (22) da

$$F = W_1 - W = \frac{W}{h}\,(h_1 - h) = \frac{W_1}{h_1}\,(h_1 - h) \qquad (25)$$

Hemos establecido las ecuaciones

$$\frac{Q}{A\,S} = \frac{Q_1}{A\,S_1},$$

y

$$A\,F = Q_1 - Q$$

ó

$$F = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q}{A},$$

y también

$$F = \frac{Q}{A\,S}(S_1 - S) = \frac{Q_1}{A\,S_1}(S_1 - S)$$

$\frac{Q_1}{A}$ y $\frac{Q}{A}$ nos representan cantidades de trabajo, equivaliendo á las cantidades $W_1$ y $W$;

$$\frac{Q}{A\,S} = \frac{Q_1}{A\,S_1}$$

equivalen á

$$\frac{W}{h} \text{ ó } \frac{W_1}{h_1},$$

ó á G, pudiendo decir que esta cantidad es un "peso térmico," y por lo mismo podemos representar S como una longitud ó una altura.

### 6. HIPOTESIS RELATIVA Á LA FUNCIÓN S.

Para hacer esta, véamos como funciona una máquina de vapor de agua, en condiciones teóricas posibles aunque irrealizables en la práctica.

El vapor que se ha generado en una caldera empuja el émbolo de un motor durante un cierto tiempo en el que la temperatura permanece constante; se interrumpe su comunicación con la caldera y el émbolo continúa avanzando hasta completar su carrera total; durante este trayecto $p$ y $v$ varían según una ley adiabática. Al retroceder el émbolo se quita el calor á la temperatura constante del condensador, debiendo comprimir-

se después el vapor adiabáticamente hasta volver á su estado primitivo en la caldera.

Las experiencias de Hirn, han demostrado sin dejar lugar á duda que midiendo las cantidades de calor $Q_1$ y $Q$ y el trabajo $F$ se tiene siempre

$$A\,F = Q_1 - Q$$

ó

$$F = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q}{A};$$

y habiendo visto por lo anterior la semejanza de la cantidades

$$\frac{Q}{A\,S} \text{ y } \frac{Q_1}{A\,S_1}$$

con un peso térmico, es indudable, que, puesto que

$$F = \frac{Q}{A\,S}(S_1 - S) = \frac{Q_1}{A\,S_1}(S_1 - S)$$

$S_1 - S$ nos representa la caída de la temperatura y la función $S$ nos representará la temperatura.

Pero, ¿que cosa es la temperatura?

Definiremos la temperatura con Hirn, diciendo que es la intensidad de la fuerza calorífica; y como según un principio de Física mecánica, la intensidad de una fuerza es siempre necesariamente proporcional á la cantidad de fuerza presente, resulta que si un termómetro de gas da realmente la intensidad de la fuerza calorífica, crecimientos iguales de intensidad (presión en el caso particular) representarán evidentemente adiciones iguales entre sí de calor.

Si suponemos el aire un gas perfecto, resulta que si abajo del cero arbitrario elegido por los físicos, continuamos quitando cantidades de calor iguales entre sí, correspondiendo á una diferencia de un grado, llegará un momento en que la intensidad calorífica representada por la presión, sea nula. El punto

así encontrado será el verdadero cero, y la temperatura contada de ese origen la llamaremos "temperatura absoluta."

La ecuación fundamental de un termómetro de gas perfecto es

$$p = P(1 \pm \alpha t)$$

Si hacemos $p = 0$ tendremos

$$t_0 = \frac{1}{\alpha};$$

y como según las experiencias de Regnault, para el aire

$$\alpha = 0{,}003665, \quad t_0 = \frac{1}{0{,}003665} = 273,$$

cantidad que nos representa la distancia en grados centígrados del cero absoluto al punto de fusión del hielo.

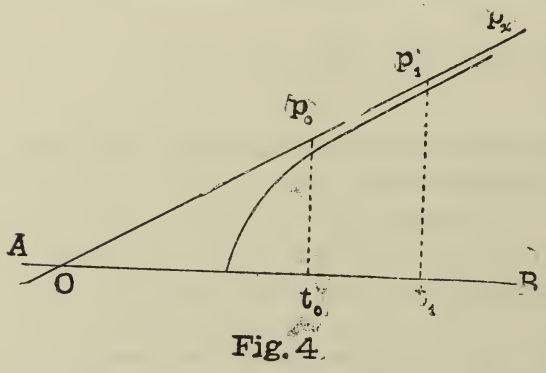


Fig. 4.

Representemos (Fig. 4). por A B una escala cualquiera de temperaturas y por

$$p_0\ t_0,\ p_1\ t_1$$

las presiones correspondientes á las temperaturas $t_0$, $t_1$. Si $\alpha$ fuese rigurosamente constante, é igual á 0,003665 y si $p_0$ y $p$ fuesen las presiones correspondientes al hielo fundente y del vapor de agua ó $0^m76$, es claro que la línea $p_0\ p_1$ iría á cortar la escala de temperaturas en un punto 0 separado de $t_0$ por 273 divisiones, la distancia $t_0\ t_1$ valiendo 100 divisiones. En realidad $\alpha$ no es constante y el crecimiento de las presiones en función de la temperatura está representado por una curva cuya concavidad mira la línea A B, la línea $p_x 0$ siendo su asímptota. La intersección de esta asímptota con la escala de temperaturas se-

rá el cero absoluto, y la temperatura en grados centígrados contada á partir de este punto será la temperatura absoluta.

Según lo anteriormente dicho la función S mide la temperatura, y su valor en función de la temperatura $t$ como se define en la física será de una manera general

$$S = a + t,$$

cualquiera que sea la escala arbitraria de temperaturas; y si elegimos la escala centígrada

$$S = 273 + t,$$

Puesto que podemos poner

$$S = a + t = F(p\,v)$$

$$\frac{d\,S}{d\,p} = \frac{d\,t}{d\,p}; \qquad \frac{d\,S}{d\,v} = \frac{d\,t}{d\,v},$$

y las ecuaciones fundamentales se transformarán en las siguientes:

(I') $$\frac{d\,Y}{d\,p} - \frac{d\,X}{d\,v} = 1$$

(II') $$a + t = Y\,\frac{d\,t}{d\,p} - X\,\frac{d\,t}{d\,v}$$

(III') $$\begin{cases} d\,Q = A\,(X\,d\,p + Y\,d\,v) \\ d\,Q = \dfrac{A}{\left(\dfrac{d\,t}{d\,p}\right)}\,[X\,d\,t + (a+t)\,d\,v] \\ d\,Q = \dfrac{A}{\left(\dfrac{d\,t}{d\,v}\right)}\,[Y\,d\,t - (a+t)\,d\,p] \end{cases}$$

Bajo esta forma aplicaremos las ecuaciones á los gases y vapores, únicos cuerpos en los que se conoce la relación que existe entre la temperatura, la presión y el volumen.

Las temperaturas absolutas las representaremos en lo sucesivo por la letra T teniéndose,

$$S = T = a + t;$$

por consiguiente, en los ciclos cerrados se tendrá siempre

$$\int \frac{d\,Q}{S} = \int \frac{d\,Q}{T} = 0,$$

según la (20), é igual valor tendrá la anterior integral en las curvas adiabáticas, pues, entonces por definición

$$d\,Q = 0.$$

En cualquier otro caso se tendrá

$$\int \frac{d\,Q}{T} = S' \qquad (26)$$

cantidad distinta de cero, y tal expresión ha sido llamada entropia.

## INVESTIGACIONES SOBRE LOS GASES PERMANENTES.

Se llaman gases permanentes los que no han podido licuarse ni solidificarse por ningún medio; designándose con el nombre de vapores, especie de gases que provienen de los cuerpos líquidos y sólidos. Esta distinción, si bien sin fundamento científico, es conveniente, dado que las fómulas fundamentales que se aplican á unos y á otros son diferentes. Sin duda alguna los gases no son sino vapores muy alejados de su punto de satura-

ción, necesitándose comprimirlos y enfriarlos considerablemente para poder licuarlos; en cambio los vapores son gases que han alcanzado su punto de condensación, ó sea un estado en el cual se licuan á la menor disminución del volumen y al más pequeño enfriamiento.

La leyes de Mariotte y Gay Lussac solo se aplican exactamente á los gases perfectamente permanentes, sin duda á gases ideales, siendo solo aproximados para los gases reales.

Si $p\,v$ y $p_0\,v_0$ son las presiones y volúmenes específicos correspondientes á las temperaturas $t$ y $t_0$, se tendrá según la ley antes citada:

$$\frac{p\,v}{p_0\,v_0} = \frac{1 + \alpha\,t}{1 + \alpha\,t_0} \qquad (27)$$

$\alpha$ siendo el coeficiente de dilatación.

Valiéndose de está fórmula, Regnault ha encontrado los valores de $\alpha$ para distintos gases en las condiciones siguientes:

1ª Manteniendo el volumen constante y haciendo variar la temperatura de 0° á 100°, observando el crecimiento en la presión de $p_0$ á $p$, obteniéndose

$$\alpha = \frac{p - p_0}{100\,p_0}$$

2ª Conservando constante la presión y midiendo los volúmenes, teniéndose

$$\alpha = \frac{v - v_0}{100\,v_0}$$

Las experiencias de Regnault han demostrado que para los gases los dos métodos anteriores dan valores poco distintos, mientras que para los vapores las diferencias son más sensibles; encontrándose además que $\alpha$ en los dos casos aumenta con la presión inicial. Natural es pues concluir que ningún gas sigue exactamente la leyes de Mariotte y Gay Lussac, y que los vapores se alejan más.

Supongamos que el verdadero valor del coeficiente de dilatación sea $\alpha$ y que este valor crezca proporcionalmente á las presiones, debiendo tener

$$\alpha_1 = \alpha + \beta p_1$$
$$\alpha_2 = \alpha + \beta p_2;$$

y eliminando á $\beta$.

$$\alpha = \frac{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}{p_2 - p_1}$$

Por medio de esta fórmula se encuentra para el aire atmosférico

$$\alpha = 0.0036603, \qquad \frac{1}{\alpha} = 273.23,$$

y para el hidrógeno

$$\alpha = 0.0036612, \qquad \frac{1}{\alpha} = 273.13;$$

pudiendo prácticamente aceptar estos gases como perfectos.

Transformemos la (27), poniendo

$$\alpha = \frac{1}{273},$$

$$\frac{p\,v}{273 + t} = \frac{p_0\,v_0}{273 + t_0} = \text{constante} = \text{R},$$

con lo que la traducción algebraica de la ley de Mariotte y Gay Lussac será

$$p\,v = \text{R}\,(273 + t) \qquad (28)$$

Si designamos por $\gamma$ la densidad ó el peso de la unidad de volumen, tendremos puesto que $v$ es el volumen de un kilo

$$v\,\gamma = 1,$$

y sustituyendo

$$\frac{p}{\gamma} = R\,(273 + t) \qquad (29)$$

Admitamos que las ecuaciones anteriores se refieran al aire caracterizado por el valor de la constante R; para cualquiera otro gas, tendremos

$$\frac{p}{\gamma_1} = R_1\,(273 + t);$$

de donde

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{R}{R_1};$$

pero $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ es la densidad del segundo gas con relación al primero; luego designándola por $\epsilon$, tendremos

$$R = R_1 \epsilon;$$

por consigüiente $R_1\,\epsilon$ es constante para todos los gases.

Para un gas cualquiera, tendremos

$$p\,v = \frac{p}{\gamma} = \frac{R}{\epsilon}\,(273 + t) \qquad (30)$$

Calculemos la constante R.

Regnault ha encontrado á la presión de $0^m76$ ó de 10334 kilos por metro cuadrado y á cero grados,
$\gamma = 1^k29318$; luego sustituyendo en la (29)

$$R = \frac{10334}{1.29318 \times 273} = 29{,}272:$$

Para obtener las constantes para los demás gases bastará conocer sus densidades con relación al aire, ó sea $\epsilon$; con lo que

$$R_1 = \frac{R}{\epsilon}.$$

## 8. CAPACIDAD CALORÍFICA DE LOS GASES.

Es común determinar la cantidad de calor que es necesario suministrar á un cuerpo para elevar su temperatura $t$ la cantidad $dt$, comparando esta cantidad con la que es necesaria para elevar de 0° á $dt^{o}$ la unidad de peso de agua, ó bien la unidad de volumen.

La relación de estas dos cantidades da una medida de la capacidad del cuerpo para el calor con relación al agua. Esta relación ha sido llamada por los físicos calor específico ó capacidad calorífica.

Se distinguen los calores específicos en peso y en volumen, según que se comparen pesos ó volúmenes iguales.

Sea C el calor específico en peso de un cuerpo y $\gamma_1$ su peso específico (peso de un metro cúbico): y $\gamma$ el peso de un metro cúbico de agua; la cantidad de calor necesaria para elevar $dt$ la temperatura de $\gamma_1$ kilos será

$$C\gamma_1\, dt.$$

La cantidad de calor necesaria para elevar de 0° á $d\,t^{o}$ $\gamma$ kilos de agua ó un metro cúbico será

$$\gamma\, dt.$$

La relación de estas dos cantidades de calor da el calor específico á volúmenes iguales; y designándolo por $\omega$ tendremos:

$$\omega = \frac{\gamma_1}{\gamma} C;$$

pero $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \epsilon$ es la densidad del cuerpo con relación al agua, luego

$$\omega = C\,\epsilon,$$

fórmula que nos permitirá calcular los calores específicos en volumen.

Según la teoría mecánica del calor, al suministrar calor á un cuerpo no solo se aumenta su calor sensible al termómetro, sino que una parte se emplea en el trabajo de desagregación y otra en vencer las resistencias externas. La capacidad calorífica depende pues de la presión exterior bajo la cual el cuerpo cambia de volumen y además de la ley según la cual esta presión varía durante la dilatación.

Para los sólidos y la mayor parte de los líquidos, la dilatación es muy pequeña y apenas afecta los valores encontrados para los calores específicos: mas no así para los gases, en los que la dilatabilidad por el calor es considerable; razón por la que se distinguen en estos los calores específicos á presión constante y á volumen constante, las capacidades caloríficas siendo consideradas en cada caso en peso y en volumen.

Designemos la capacidad en peso de un gas á presión constante por $C_p$ y la capacidad en peso á volumen constante por $C_v$. Para pasar á las capacidades en volumen á presión y á volumen constantes, ó sea los valores de $\omega_p$ y $\omega_v$, basta multiplicar según lo dicho anteriormente, respectivamente $C_p$ y $C_v$ por la densidad $\epsilon$ del gas relativo al agua.

Las capacidades á presión constante han sido determinadas experimentalmente por Regnault, no habiendo sido posible hasta ahora encontrar experimentalmente los valores de las capacidades á volumen constante, las cifras numéricas dadas siendo el resultado del cálculo.

Los valores dados por Regnault, son los siguientes.

| Gas. | Capacidad en peso. | Capacidad en volumen. |
|---|---|---|
| | $C_p$ | $\omega_p$ |
| | *á presión constante y relacionados al agua.* | |
| Aire atmosférico | 0.23751 | 0.00030714 |
| Azoe | 0.24380 | 0.00030625 |
| Oxígeno | 0.21751 | 0.00031099 |
| Hidrógeno | 3.40900 | 0.00030533 |

El cuadro anterior demuestra que las capacidades en peso á

presión constante son diferentes para los distintos gases; en cambio, las capacidades en volumen á presión constante varían tan poco, que posible es, que á lo menos para los gases perfectos $\omega_p$ sea constante. Mr. Regnault ha demostrado, también por sus experiencias, que el calor específico de los gases, y especialmente el del aire, es el mismo á distintas temperaturas y presiones.

Aunque $C_v$ ó el calor específico á volumen constante no ha podido ser determinado directamente, indirectamente sí se ha podido encontrar á lo menos para el aire, y esto por varios métodos que han dado á los experimentadores el valor de la relación

$$\frac{C_p}{C_v} = K$$

El valor más probable de K es el dado por M. M. Moll y Van Beck, y es el aceptado en el estado actual de la ciencia ó sea

$$K = 1.41;$$

por consiguiente

$$\frac{C_p}{C_v} = 1.41,$$

y como

$$C_p = 0.23751,$$

$$C_v = 0.16844.$$

## 9. APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES Á LOS GASES.

Aceptaremos las hipótesis siguientes:

Un gas perfecto sigue rigurosamente las leyes de Mariotte y Gay Lussac;

El calor específico á presión constante y á volumen constante en tales gases es una cantidad constante;

El más importante de los gases permanentes, el aire atmosférico, será considerado como gas perfecto.

Si á la unidad de peso de un gas se le suministra la cantidad de calor $dQ$ haciendo variar su temperatura $t$ en $dt$, tendremos si la presión es constante

$$d\,Q_p = C_p\,dt;$$

y si el calentamiento tiene lugar á volumen constante

$$d\,Q_v = C_v\,dt$$

Estos dos valores de $d\,Q$ pueden ser determinados por las ecuaciones del grupo (III').

Si en la última hacemos $d\,p = 0$, tendremos:

$$d\,Q_p = \frac{A\,Y}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}\,dt;$$

y si en la segunda se hace

$$dv = 0$$

se tendrá

$$d\,Q_v = \frac{A\,X}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dt$$

Poniendo en estas ecuaciones los valores encontrados primeramente para $d\,Q_p$ y $d\,Q_v$, se tendrá:

$$C_p = \frac{A\,Y}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} \qquad \text{y} \qquad C_v = \frac{A\,X}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}$$

Estas ecuaciones nos permitirán encontrar para los gases permanentes los valores de X é Y.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{C_v}{A}\left(\frac{dt}{dp}\right) \\ Y &= \frac{C_p}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Puesto que hemos encontrado

$$pv = R\,(273 + t),$$

diferenciando tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \frac{v}{R} \\ \frac{dt}{dv} &= \frac{p}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

y sustituyendo estos valores en las anteriores ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{C_v\, v}{A\, R} \\ Y &= \frac{C_p\, p}{A\, R} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

La primera ecuación fundamental es

$$\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 1;$$

y como la diferenciación de las (33) da,

$$\frac{d\,Y}{d\,p} = \frac{C_p}{A\,R} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\,X}{d\,v} = \frac{C_v}{A\,R},$$

sustituyendo se tendrá la interesantísima ecuación

$$C_p - C_v = A\,R \qquad (34)$$

Concluyéndose que la diferencia de los calores específicos en peso, es una cantidad constante para cada gas.

Si multiplicamos la ecuación anterior por $\epsilon$ tendremos,

$$\epsilon C_p - \epsilon C_v = A R \epsilon$$

ó

$$\omega_p - \omega_v = A R \epsilon \qquad (35)$$

Hemos demostrado que $R \epsilon$ es constante para todos los gases, luego la diferencia de las dos capacidades en volumen es la misma para todos los gases.

Para el aire en la ecuación 34 todo es conocido menos A, pudiendo deducir de tal ecuación su valor

$$\frac{1}{A} = \frac{R}{C_p - C_v};$$

pero

$$R = 29.272, \qquad C_p = 0.23751 \qquad y \qquad C_v = 0.16844,$$

luego

$$\frac{1}{A} = \frac{29.972}{0.23751 - 0.16844} = 423.80 \text{ kilográmetros},$$

resultado enteramente de acuerdo con la experiencia, y que justifica la exactitud de las hipótesis hechas.

Si en la ecuación

$$a + t = Y \frac{dt}{dp} - X \frac{dt}{dv}$$

ponemos en el 2º miembro los valores encontrados, tendremos;

$$a + t = C_p \frac{p}{A R} \frac{v}{R} - C_v \frac{v}{A R} \frac{p}{R},$$

ó

$$a + t = \frac{C_p - C_v}{A R} \frac{pv}{R};$$

mas como hemos encontrado

$$C_p - C_v = A\,R,$$

queda

$$a + t = \frac{p\,v}{R} \qquad \text{ó} \qquad pv = R\,(a + t),$$

ecuación que comparada con la obtenida por la ley de Mariotte y Gay Lussac da

$$a = 273$$

resultado ya obtenido por otro razonamiento y que confirma las consideraciones sobre la temperatura absoluta.

El grupo de ecuaciones (III') puede escribirse como sigue para los gases, sustituyendo las cantidades encontradas, y reemplazando para más comodidad, dado el papel importante que desempeñará en lo sucesivo, $C_v$ por la letra C y $C_p$ por K C según la ecuación

$$K = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\left.\begin{aligned} d\,Q &= \frac{C}{R}\,(v\,dp + K\,p\,dv) \\ d\,Q &= C\,dt + \frac{A\,R\,(a+t)}{v}\,dv \\ d\,Q &= K\,c\,dt - \frac{A\,R\,(a+t)}{p}\,dp \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Según la observación anterior la 34 puede escribirse

$$C\,(K - 1) = A\,R \qquad (37)$$

## 10. LÍNEAS ISOTÉRMICAS E ISODINÁMICAS DE LOS GASES PERMANENTES.

Hemos definido la línea isotérmica, diciendo que es aquella según la cual $p$ y $v$ varían, la temperatura quedando constante.

Según la ley de Mariotte

$$pv = \mathrm{R}\,(a + t);$$

si pues $t$ debe permanecer constante, la ecuación de las líneas isotérmicas será

$$pv = \text{constante},$$

ecuación de una hipérbola equilátera referida á sus asímptotas.

La constante siendo igual á $\mathrm{R}\,(a + t)$, el conocimiento de la temperatura es bastante para definir la curva.

Cuando $p$ y $v$ varían, el trabajo interno permaneciendo constante, se dice que la curva es isodinámica.

Para encontrar la ecuación de esta curva, hagamos uso de las ecuaciones siguientes

$$d\,\mathrm{Q} = \mathrm{A}\,(d\,\mathrm{U} + p\,dv),$$

y

$$d\,\mathrm{Q} = c\,dt + \frac{\mathrm{A\,R}\,(a + t)}{v}\,dv,$$

que puede escribirse

$$d\,\mathrm{Q} = c\,dt + \mathrm{A}\,p\,dv \qquad (38)$$

y como son equivalentes, su comparación da

$$d\,\mathrm{U} = \frac{c}{\mathrm{A}}\,dt \qquad (39)$$

Integrando entre los límites $t$ y $t_1$ se tendrá

$$\mathrm{U} - \mathrm{U}_1 = \frac{c}{\mathrm{A}}\,(t - t_1) \qquad (40)$$

pero

$$pv = \mathrm{R}\,(a + t)$$

y

$$p_1 v_1 = \mathrm{R}\,(a + t_1),$$

de donde

$$p\,v - p_1\,v_1 = \mathrm{R}\,(t - t_1\,),$$

y sustituyendo

$$\mathrm{U} - \mathrm{U}_1 = \frac{c}{\mathrm{A\,R}}\,(p\,v - p_1\,v_1\,) \qquad (41)$$

Habiamos hecho $\mathrm{U} = \mathrm{F}\,(p\,v)$; por consiguiente esta función para los gases permanentes es completamente determinada; y la (40) demuestra que el incremento del trabajo interior se deduce simplemente del incremento de las temperaturas, con tal, bien entendido, que la presión exterior sea igual á la fuerza expansiva del gas.

La integración de la (38) da

$$\mathrm{Q} = c\,(t - t_1\,) + \mathrm{A}\int_{v_1}^{v} p\,dv \qquad (42)$$

Si

$$d\,\mathrm{U} = 0, \qquad t = t_1\,,$$

quedando

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}} = \int_{v_1}^{v} p\;dv, \qquad (43)$$

ecuación de una isotérmica; por consiguiente en los gases permanentes las isotérmicas é isodinámicas se confunden.

Puesto que $t$ es constante, pongamos en la (43)

$$p = \frac{\mathrm{R}\,(a + t)}{v},$$

con lo que

$$\left.\begin{aligned} Q = A\,R\,(a+t)\int_{v_1}^{v}\frac{dv}{v} &= A\,R\,(a+t)\,L\,g\,\frac{v}{v_1} \\ &= A\,pv\;L\,g\,\frac{v}{v_1} \\ &= A\,p_1\,v_1\;L\,g\,\frac{v}{v_1} \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

y como

$$pv = p_1\,v_1\,, \qquad \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}.$$

Conociendo Q, el trabajo será

$$\frac{Q}{A} = L = R\,(a+t)\,L\,g\,\frac{v}{v_1} = p\,v\,L\,g\,\frac{v}{v_1} = p_1\,v_1\,L\,g\,\frac{v}{v_1} \qquad (45)$$

Estas dos últimas ecuaciones demuestran que la cantidad de calor por suministrar y el trabajo producido son independientes de la naturaleza del gas empleado.

Las mismas ecuaciones (44) y (45) se aplican cuando el gas se comprime, $t$ permaneciendo constante, la primera dando el calor que debe quitarse y la segunda el trabajo que es necesario gastar.

## 11. ENTROPIA DE UN KILO DE GAS.

La 2ª ecuación de las (36) permite calcularla fácilmente; en efecto esta ecuación da

$$d\,Q = c\,d\,t + \frac{A\,R\,(a+t)}{v}\,d\,v;$$

si dividimos los dos miembros por $T = a + t$, tendremos

$$\frac{d\,Q}{T} = c\,\frac{d\,t}{T} + A\,R\,\frac{d\,v}{v}$$

Puesto que la entropia está definida por la ecuación

$$\int \frac{d\,Q}{T},$$

integrando la anterior, tendremos

$$\int_{T_0}^{T} \frac{d\,Q}{T} = S' = c\ L\,g\,\frac{T}{T_0} + A\ R\ L\,g\,\frac{v}{v_0} + S'_0$$

$v_0$, $T_0$, $S'_0$ siendo los valores iniciales y $v$, T, S, los finales.

## 12. LÍNEAS ADIABÁTICAS DE LOS GASES PERMANENTES.

Cuando la presión $p$ y volumen $v$ de un cuerpo varían de tal manera que éste ni pierda ni reciba calor, la curva que representa tal variación ha recibido el nombre de adiabática.

Para encontrar su ecuación hagamos uso de la fórmula

$$d\,Q = \frac{c}{R}\,(v\,d\,p + K\,p\,d\,v),$$

en la que haremos por definición $d\,Q = 0$, con lo que la ecuación diferencial de la curva será

$$v\,d\,p + K\,p\,d\,v = 0,$$

ó

$$\frac{d\,p}{p} + K\,\frac{d\,v}{v} = 0;$$

é integrando

$$\mathrm{L}\, g\, p + \mathrm{K}\, \mathrm{L}\, g\, v = \text{constante}$$

ó

$$\mathrm{L}\, g\, p v^{\mathrm{k}} = \text{constante};$$

y por lo mismo

$$p\, v^{\mathrm{k}} = \text{constante} = p_1\, v_1{}^{\mathrm{k}} \tag{46}$$

De esta ecuación se deduce

$$\frac{p\, v}{p_1\, v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\mathrm{k}-1},$$

ó

$$\frac{a + t}{a + t_1} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\mathrm{k}-1} \tag{47}$$

Como la (46) da

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{k}}},$$

$$\frac{a + t}{a + t_1} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}} \tag{48}$$

Sirviendo estas dos últimas ecuaciones para calcular el cambio de temperatura durante la expansión adiabática, indicando la (46) que á un aumento en el volumen corresponde una disminución en la temperatura.

Busquemos el trabajo producido por un gas que se expanse según la ley adiabática, pasando del volumen $v_1$ al volumen más grande $v_2$ y cuya presión y temperatura decrezcan respectivamente de $p_1$ á $p_2$ y de $t_1$ á $t_2$ .

Este mismo trabajo será gastado si la unidad de peso del gas se comprime pasando del volumen $v_2$ al $v_1$ en las mismas circunstancias.

Si integramos la (38) en el supuesto anterior ó sea haciendo $dQ = 0$ tendremos

$$0 = c\,(t_2 - t_1) + \mathrm{A}\int_{v_1}^{v_2} p\,dv;$$

de donde

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,d\,v = \mathrm{L} = \frac{c}{\mathrm{A}}\,(t_1 - t_2) \tag{49}$$

No es común dar las temperaturas, sino las presiones y volúmenes iniciales y finales.

Transformemos pues la anterior como sigue

$$\mathrm{L} = \frac{c}{\mathrm{A}}\,[(a + t_1) - (a + t_2)] = \frac{c\,(a + t_1)}{\mathrm{A}}\left[1 - \frac{a + t_2}{a + t_1}\right];$$

y según las (47) y (48)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{c}{\mathrm{A\,R}}\,p_1\,v_1\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\mathrm{k}-1}\right] \\ \mathrm{L} &= \frac{c}{\mathrm{A\,R}}\,p_1\,v_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

En las anteriores puede reemplazarse

$$\frac{c}{\mathrm{A\,R}} = \frac{1}{\mathrm{K} - 1},$$

según la (37).

Para valuar el trabajo total necesario para efectuar una compresión, debe tenerse en cuenta que una masa de aire pasa de una presión constante á otra también constante, pero habiendo cambio térmico, razón por la que debe llevarse en cuenta el trabajo externo debido á ese cambio térmico.

Para mayor claridad y generalidad, pongamos la cuestión en la forma siguiente.

Se tiene un peso G de aire, cuyo volúmen es $V_1$ á la presión $p_1$ y temperatura absoluta $T_1$, que vá á comprimirse adiabáticamente hasta ocupar el volúmen $V_2$ á la presión $p_2$ y temperatura $T_2$.

Sin atender al cambio térmico, el trabajo es según la fórmula (49), para el peso G

$$L_1 = G \frac{c}{A} (T_2 - T_1),$$

cambiada de signo por tratarse de una compresión.

Según la ley de Mariotte, tenemos:

$$p\, v = R\, T;$$

pero puesto que $v$ es el volúmen específico, es claro que en general

$$v\, G = V;$$

luego

$$p_1 V_1 = G\, R\, T_1$$

$$p_2 V_2 = G\, R\, T_2$$

El trabajo debido al cambio térmico será

$$p_2 V_2 - p_1 V_1 = R\, G\, (T_2 - T_1);$$

y el trabajo total necesario para la compresión

$$L = G \frac{c}{A} (T_2 - T_1) + R\, G\, (T_2 - T_1) =$$

$$= G\, (T_2 - T_1) \left( \frac{c}{A} + R \right) = \frac{G}{A} c_p\, (T_2 - T_1) \qquad (50')$$

pues según la (34)

$$c_p - c_v = A\, R.$$

Poniendo por $c_p$ y A sus valores, tendremos para el trabajo total

$$L = 100{,}704\ G\, (T_2 - T_1)$$

$$L = 100{,}704\ G\ T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

ó

$$L = 100{,}704\ G\ T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] \qquad (50'')$$

Si el volumen de la compresión es V y el volumen de aire que debe comprimirse por segundo $V_1$, es claro que siendo $n$ el número de revoluciones del motor se tendrá

$$V = \frac{V_1}{2n};$$

y según la fórmula

$$p_1 V_1 = G\ R\ T_1,$$

resulta

$$V = \frac{G\ R\ T_1}{2np_1} \qquad (50''')$$

**EJEMPLOS.**

I. Se tiene un kilo de gas á la temperatura $t_1 = 30°$ encerrado en un cilindro; se le deja dilatarse conservando constante la temperatura hasta que $v_1$ se convierte en $v_2 = \frac{4}{3} v_1$. Se pide el trabajo desarrollado y la cantidad de calor que debe suministrarse al gas para que la temperatura permanezca constante.

El trabajo está dado por la fórmula.

$$L = R\ (273 + t)\ Lg \frac{v_2}{v_1},$$

en la que

$$R = 29.27, \qquad t = 30^0, \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}.$$

Sustituyendo

$$L = 29.27 \times 303 \times 0.288 = 2554 \text{ km.}$$

La cantidad de calor será

$$Q = A\,L = 2554 \times 0.0024 = 6^c.13.$$

II. Sea el mismo kilo de gas á 30°, expansiéndose adiabáticamente hasta que

$v_2 = \frac{4}{3}\, v_1$; $p_1$ siendo de $1\frac{1}{2}$ atmósferas. Se pide el trabajo, la temperatura final y el calor desaparecido.

El trabajo será

$$L = \frac{1}{K-1}\, p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right],$$

ó sustituyendo

$$L = \frac{1}{0.41}\, 29.27\ (303) \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{0.41}\right] =$$

$$= \frac{8868.8 \times 0.111}{0.41} = 2402 \text{ Km.}$$

La ecuación 47 da

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{0.41}$$

ó

$$\frac{273 + t_2}{303} = (0.75)^{0.41} = 0{,}889;$$

de donde

$$t_2 = 269.4 - 273 = -3^0,6.$$

Puesto que el trabajo es $L = 2402$ km., el calor desaparecido será

$$Q = A\,L = 0.0024 \times 2402 = 5.^c 76.$$

III. Cuál es el número máximo de calorías que puede ceder por enfriamiento un metro cúbico de aire no comprimido, tomado á la presión atmosférica, cualquiera que sea la temperatura á la que ha sido llevado?

Si llamamos Q la cantidad de calor, deberemos tener

$$Q = \pi\,(T - T_0)\,C_p,$$

$\pi$ siendo el peso del metro cúbico, T la temperatura final, $T_0$ la inicial y $C_p$ el calor específico, puesto que el enfriamiento debe tener lugar á presión constante.

Según fórmula (29)

$$\frac{p}{\pi} = R\,T;$$

luego

$$Q = \frac{p}{R\,T}\,C_p\,(T - T_0) = C_p\,\frac{p}{R}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right);$$

ecuación que tiene evidentemente por límite

$$C_p\,\frac{p}{R} = 0.2374\,\frac{10334}{29.27} = 84 \text{ calorías} = Q$$

IV. Se deja dilatar un metro cúbico de aire de 10 atmósferas á una, á la temperatura constante de $20^0$; calcular el trabajo disponible.

El trabajo para un kilo estará dado por

$$L = R\,(273 + t)\,L\,g\,\frac{p_1}{p_2}$$

Busquemos cuanto pesa el metro cúbico de aire en las condiciones del problema; tenemos:

$$\frac{p}{\gamma} = R\,(273 + t)$$

Para

$$t = 0 \qquad y \qquad p = 1 \text{ atmósfera}, \qquad \gamma = 1.293;$$

luego

$$\frac{10334}{1.293} = R \times 273$$

Para

$$p = 10 \text{ atmósferas} \qquad y \qquad t = 20^{\circ},$$

tendremos

$$\frac{10 \times 10334}{x} = R \times 293;$$

de donde

$$x = \frac{1.293 \times 10 \times 273}{293}$$

El trabajo para $x$ kilos, será

$$L' = R.\,293.\ L\!g\ 10.\ \frac{1.293 \times 10 \times 273}{293} =$$

$$= \frac{10334}{1.293 \times 273}\ 293.\ L\!g\ 10\,\frac{1.293 \times 10 \times 273}{293} = 10334 \times$$

$$\times\ 10\ L\!g\ 10 = 103340 \times 2.3026 = 237950 \text{ Km.}$$

V. Un recipiente conteniendo hidrógeno á dos atmósferas de presión y á 0° se abre bruscamente, abatiéndose instantáneamente la presión hasta una atmósfera. Se pide el peso específico del gas al terminar la expansión?

Se tiene

$$p_1 \, {v_1}^k = p_2 \, {v_2}^k$$

ó

$$\frac{p_1}{{\gamma_1}^k} = \frac{p_2}{{\gamma_2}^k};$$

de donde

$$\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^k = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \gamma_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1.41}}$$

Para el hidrógeno, $\gamma = 0.0896$ á una atmósfera de presión; á dos atmósferas $\gamma_1 = 0.1792$.

Sustituyendo

$$\gamma_2 = 0.1792 \times 0.612 = 0.1097.$$

VI. Se tiene un kilo de gas encerrado en un recipiente á la temperatura de 30° y á la presión de $1\frac{1}{2}$ atmósferas; á qué temperatura debe enfriarse el gas para que la presión sea de una atmósfera, y qué cantidad de calor debe quitarse?

La ecuación en el estado inicial será

$$p_1 v_1 = \mathrm{R}\,(a + t_1)$$

ó

$$p_1 v_1 = \mathrm{R}.\ 303;$$

y en el estado final

$$p_2 v_1 = \mathrm{R}\ (273 + t_2),$$

de donde

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} = \frac{273 + t_2}{303}$$

ó

$$t_2 = \frac{2}{3} \times 303 - 273 = -71^0$$

La cantidad de calor que deberá quitarse será

$$d\,Q = c\,dt$$

ó

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c\,dt = C\,(t_2 - t_1) =$$

$$= 0.1685\,(-71 - 30) = -17{,}02 \text{ calorías.}$$

La disminusión del trabajo interno será

$$U_2 - U_1 = \frac{Q}{A} = \frac{17{,}02}{A} = 424 \times 17{,}02 = 7216 \text{ Km.}$$

VII. Se tiene un kilo de gas á 30° de temperatura y á la presión $p_1$; el volumen inicial $v_1$ debe llevarse al volumen

$$v_2 = \frac{4}{3} v_1.$$

Se pide la temperatura final, la cantidad de calor por suministrar y el cambio del trabajo interno.

Es claro que en el estado inicial tendremos

$$p_1 v_1 = R.\ 303;$$

y en el final

$$p_1 v_2 = R\,(273 + t_2);$$

de donde

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3} = \frac{273 + t_2}{303};$$

y despejando

$$t_2 = \frac{4}{3}\,303 - 273 = 131°$$

La cantidad de calor será

$$d\,Q = K\,c\,dt$$

ó

$$Q = K\,c\,(t_2 - t_1) = 0.2575 \times 101 = 23,^c\,99$$

La variación de trabajo interno será

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}\,(t_2 - t_1) = \frac{0.1685}{A}\,101 = 7216 \text{ Km.}$$

ó sea

$$17.^c\,02$$

Como aquí hay trabajo externo se tendrá

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p_1\,dv = p_1\,(v_2 - v_1) = R\,(t_2 - t_1) = 29,27 \times 101 =$$
$$= 2956 \text{ Km.}$$

ó $6^c$, 97, la suma de estas dos cantidades siendo $23^c$, 99, calor total suministrado.

VIII. Estando dado el estado inicial $(p_1 v_1 t_1)$ de la unidad de peso de un gas se supone que este se dilata y adquiera el volumen $v_2$ sin que se tenga que vencer ninguna presión exterior, y sin que haya ni introducción ni sustracción de calor; ¿cuál es el estado final del gas?

En la ecuación siguiente

$$Q = c\,(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

haremos $p = 0$ y $Q = 0$, con lo que quedará

$$0 = c\,(t_2 - t_1)$$

ó

$$t_2 = t_1$$

Es decir que al restablecerse el equilibrio la temperatura final será igual á la inicial. Este resultado ha sido comprobado por la experiencia.

IX. La masa de vapor contenida en un generador recibe del hogar una cantidad de calor igual á 800 calorías, su temperatura siendo de 160°; como el refrigerador se mantiene á 40° de temperatura, se pregunta, ¿qué cantidad de calor se ha quitado, y cuál es el trabajo exterior desarrollado?

Según el pridcipio de Carnot se tendrá

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

ó

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

pero

$$Q_1 = 800, \qquad T_1 = 273 + 160, \qquad T_2 = 273 + 40,$$

luego

$$\frac{800 - Q_2}{800} = \frac{120}{433};$$

de donde

$$Q_2 = 579 \text{ calorías.}$$

El calor desaparecido será

$$800 - 579 = 221$$

luego el trabajo producido debe ser

$$424 \times 221 = 93704 \text{ Km.}$$

### 13.—ESCURRIMIENTO DE LOS GASES.

Haremos aquí las mismas hipótesis que en hidráulica: supondremos constante la presión en el recipiente de donde sale el flúido, la presión en el orificio de salida y la presión en el lugar donde el flúido corre; admitiremos además la continuidad del movimiento.

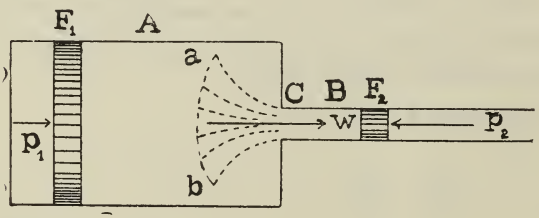



Fig. 5

El recipiente A de donde sale el flúido es un cilindro de sección $F_1$ en el cual se mueve un émbolo cuya cara exterior soporta la presión $p_1$; la fuerza motora será pues $p_1 F_1$. El escurrimiento se hace por un aditicio B venciendo la resistencia $p_2 F_2$ suponiendo que el émbolo $F_2$ se mueve sin frotamiento á la misma velocidad $w$ que corresponde á la salida por el orificio C cuya sección es igual á $F_2$.

Supongamos que $F_1$ avance la cantidad $s_1$, retrocediendo $F_2$ la cantidad $s_2$; sin duda alguna se ha comunicado al flúido el trabajo

$$p_1 F_1 s_1 - p_2 F_2 s_2.$$

$F_1 s_1$ representa el volumen del flúido que ha salido del recipiente A y $F_2 s_2$ el volumen de la misma cantidad de flúido que ha entrado en B; si pues se supone que ha salido la unidad de peso, tendremos

$$p_1 F_1 s_1 - p_2 F_2 s_2 = p_1 v_1 - p_2 v_2$$

ecuación que nos da el trabajo que la unidad de peso ha ganado durante el escurrimiento.

Al acercarse el flúido al orificio de salida C la presión pasa de $p_1$ á $p_2$ y el velumen específico de $v_1$ á $v_2$; pero al mismo tiempo la velocidad pasa de cero á $w$ que corresponde al orificio de salida. Estos cambios no se hacen bruscamente: la presión $p_1$ se conserva en una superficie $ab$, á cierta distancia del orificio, formándose á partir de aquí una especie de embudo en el que la presión y volumen iniciales pasarán á la presión y volumen que corresponde al orificio de salida; es decir, el gas se expanse efectuando un trabajo dado por

$$\int_{v_1}^{v_2} p\, dv.$$

Hay pues dos trabajos, uno á presión constante y otro debido á la expansión, que reunidos son

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\, dv,$$

trabajo empleado sin duda alguna, en crear la velocidad $w$ del escurrimiento; y como hemos supuesto la unidad de peso del gas, el trabajo ganado será

$$\frac{w^2}{2g};$$

teniéndose con toda evidencia

$$\frac{w^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_1 + \int_{v_1}^{v_2} p\, dv \qquad (51)$$

Es sabido que

$$dp\, v = p\, dv + v\, dp$$

ó

$$-dp\, v + p\, dv = -v\, dp.$$

Integrando tendremos

$$-\int_{v_1}^{v_2} dp\, v + \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = -\int_{p_1}^{p_2} v\, dp$$

ó

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = -\int_{p_1}^{p_2} v\, dp$$

Según esto, la diferenciación de la (51) dará:

$$d\frac{w^2}{2g} = -dp\, v + p\, d\, v \tag{52}$$

ó

$$\frac{d\, w^2}{2\, g} = -v\, dp \tag{53}$$

Ecuación que demuestra claramente que la cuestión es indeterminada, y la integración imposible, á menos que se conozca la ley según la cual varían $p$ y $v$.

Trasformemos la (52) por medio de la ecuación

$$d\, Q = A\, (d\, U + p\, dv)$$

$$d\frac{w^2}{2g} = -dp\, v - d\, U + \frac{d\, Q}{A} \tag{54}$$

Para los gases

$$dp\, v = d\, (R\, T) = R\, dt \quad \text{y} \quad d\, U = \frac{c}{A}\, dt$$

ecuación ya encontrada y designada con el número (39), luego

$$A\frac{dw^2}{2g} = -A\, R\, dt - c\, dt + d\, Q;$$

y según la (37)

$$A\, d\frac{w^2}{2g} = -K\, c\, dt + d\, Q \qquad (55)$$

en la que $d\,Q$ está dado por las ecuaciones (36)

Si suponemos que el volumen específico no varía, la integración de la (53) da, $v$ siendo constante

$$\frac{w^2}{2g} = -v_1 \int_{p_1}^{p_2} dp = v_1 (p_1 - p_2)$$

La diferencia de presiones $p_1 - p_2$ puede ser sustituida por el peso de una columna de gas de densidad constante $\gamma$ y de altura $h$, teniéndose

$$p_1 - p_2 = h\, \gamma;$$

pero

$$v_1\, \gamma = 1,$$

luego

$$\frac{w^2}{2g} = h\, \gamma\, v_1 = h,$$

de donde

$$w = \sqrt{2gh.}$$

Es la fórmula de Bernoulli, que supone el gas incompresible como un líquido, lo que es contrario á la realidad. La fórmula da valores más grandes que los obtenidos experimentalmente, debiéndose multiplicar sus resultados por una cantidad $\phi$ variable según el exceso de la presión, teniendo $\phi$ según Wantze, Saint–Venant y Poncelet los valores dados en la tabla siguiente

| Exceso de presión en atmósferas | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 190 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $\phi$ | 0.648 | 0.631 | 0.579 | 0.54 | 0.45 | 0.43 | 0.404 | 0.401 |

Si el escurrimiento tiene lugar á temperatura constante, tendremos por la (52), puesto que según la ley de Mariotte

$$p\,v = \text{constante}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1\,v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1\,v_1\ \mathrm{L}\,g\,\frac{v_2}{v_1};$$

ó

$$w^2 = 2g\ \mathrm{R}\ \mathrm{T}_1\ \mathrm{L}\,g\,\frac{v_2}{v_1} = 2g\ \mathrm{R}\ \mathrm{T}_1\ \mathrm{L}\,g\,\frac{p_1}{p_2}$$

Es la fórmula de Navier que supone que se ha suministrado al gas la cantidad de calor

$$\mathrm{Q} = \mathrm{A}\,\frac{w^2}{2g} = \mathrm{A}\ p_1\,v_1\ \mathrm{L}\,g\,\frac{v_2}{v_1}.$$

Cuando el gas está en un recipiente á la preslón $p_1$ y debe escurrir á otro en el que la presión es $p_2$, es raro que se suministre ó se quite calor al gas, por lo que estudiaremos el escurrimiento sin variación de calor, ó sea en el caso adiabático.

Hagamos pues $d\,\mathrm{Q} = 0$ en la fórmula (55), obteniéndose

$$\mathrm{A}\,d\,\frac{w^2}{2g} = -\,\mathrm{K}\,c\,dt \qquad (56)$$

La ecuación (48) nos da

$$\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}};$$

con lo que la integración de la (56) dará

$$\mathrm{A}\,\frac{w^2}{2g} = \mathrm{K}\,c\,(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) \qquad (57)$$

de donde

$$w = \sqrt{2g \frac{K\,c}{A} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad (58)$$

El volumen específico $v_2$ del gas en el orificio de salida se calcula por

$$v_2 = \frac{R\,T_2}{p_2} \qquad (59)$$

Como las cantidades conocidas en este asunto son $T_1$, $p_1$ y $p_2$ la (58) da $w$ y la (57), $T_2$.

Si F es la sección del orificio de salida, como la velocidad es $w$ el gasto será

$$F\,w.$$

Si G es el peso de gas que llega por segundo al orificio en el cual el volumen específico es $v_2$ tendremos

$$G\,v_2 = F\,w \qquad (60)$$

fórmula que nos permitirá calcular á G.

La experiencia demuestra que la velocidad efectiva es siempre menor que la teórica; si pues llamamos $\phi$ un coeficiente menor que uno y $w_e$ la velocidad efectiva, tendremos

$$w_e = \phi\,w = \phi \sqrt{2g \frac{K\,c}{A} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad (61)$$

$T_2$ se calculará por la (57) pero poniendo $w_e$ en lugar de $w$, teniéndose

$$T_1 - T_2 = \frac{A}{K\,c} \frac{w^2{}_e}{2g} \qquad (62)$$

Si llamamos $\alpha$ el coeficiente de contracción por el orificio en pared delgada, tendremos

$$G\, v_2 = \alpha\, F\, w_e = \alpha\, \phi\, F\, w;$$

de donde

$$G = \alpha\, \phi\, \frac{p_2}{R\, T_2}\, F w \qquad (63)$$

según la (59)

Al salir del orificio el chorro de gas se expanse á la presión constante $p_2$; no hay calor introducido, pero el trabajo que corresponde á la velocidad $w$ ó sea

$$\frac{w^2}{2g},$$

se trasforma en calor; las cosas se pasan como si el gas al entrar en reposo recibiera la cantidad de calor

$$A\, \frac{w^2}{2g}$$

á la presión constante $p_2$.

Si $T'_2$ es la temperatura del gas en el segundo recipiente que está ya en reposo, el cambio de $T_2$ á $T'_2$ estará dado por la ecuación

$$Q = K\, c\, (T'_2 - T_2);$$

y puesto que

$$Q = A\, \frac{w^2}{2g}$$

tendremos

$$A\, \frac{w^2}{2g} = K\, c\, (T'_2 - T_2),$$

ecuación que comparada con la (57) da

$$(T_1 = T'_2);$$

es decir, que la temperatura es la misma en los dos recipientes; por consiguiente cuando un gas permanente escurre de un recipiente á otro sin que se le suministre ni se le quite calor, la presión quedando constante en cada recipiente, no hay cambio de temperatura.

La temperatura del lugar donde el gas escurre siendo pues $T_1$ y $p_2$ la presión, el volumen específico que en el plano del orificio era $v_2$, será aquí

$$v'_2 = \frac{R\,T_1}{p_2} \tag{64}$$

El volumen $V_2$ de la cantidad de gas que escurre por segundo, volumen medido á la presión exterior será

$$V_2 = G\,v'_2 \tag{65}$$

Eligiendo un aditicio que tenga la forma del chorro contraído y de 10 milímetros de anchura, puede tomarse para un exceso de presión medido en milímetros de mercurio de 180 á 850

$$\phi = 0.981,$$

haciendo

$$\alpha = 1.00.$$

Con orificios circulares en pared delgada de 10 á 24 milímetros de diámetro y con cargas de 50 á 850 milímetros de mercurio, puede tomarse

$$\phi = 0.98 \quad \text{y} \quad \alpha\,\phi = 0.555 \quad \text{á} \quad 0.795,$$

este valor aumentando con la carga.

Con aditicios cilíndricos muy cortos de 10 á 24 milímetros de diámetro, se ha encontrado en los mismos límites de carga

$$\phi = 0.737 \quad \text{á} \quad 0.839, \qquad \alpha = 1,$$

valores poco diferentes de los encontrados para el escurrimiento del agua.

### EJEMPLO.

Se tiene un recipiente á 30° de temperatura y á la presión de $1\frac{1}{2}$ atmósferas; se deja escurrir en el aire por un aditicio conveniente, y se pide el gasto por segundo en volumen medido á la presión exterior y á la interior, así como el peso.

La fórmula (58) nos da

$$w = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{0.2375}{\frac{1}{424}} \times 303 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{0.41}{1,41}}\right]} =$$

$$= \sqrt{19.62 \times 424 \times 0.2375 \times 303 \times 0.111} =$$

$$= \sqrt{66449} = 258 \text{ metros.}$$

$$w_e = 0.98\, w = 253 \text{ metros.}$$

La (62) da

$$303 - T_2 = \frac{0.0024}{0.2375} \times \frac{(253)^2}{19.62} = 0.0101 \times 3262 = 32^0,9.$$

Despejando

$$T_2 = 270^0 1$$

ó en grados centígrados

$$t_2 = -2^0 9.$$

La (63) da

$$G = \frac{10334}{29.27 \times 270.1} \times 253\, F = 331\, F \text{ kilos,}$$

F estando en metros cuadrados.

El volumen de aire medido á la presión exterior cuando ésta ha alcanzado la temperatura $t_1 = 30^0$ del interior del recipiente, será

$$V_2 = G\, v'_2 = G\, \frac{R\, T_1}{p_2} \qquad \text{según la (64)}$$

ó

$$V_2 = 284\ F.$$

Este volumen medido á la presión interior sería

$$V_1 = \frac{p_2\, V_2}{p_1} = \frac{2}{3}\, V_2 = 189\ F.$$

14.—ESCURRIMIENTO DE UN GAS DE UN RECIPIENTE Á OTRO, SUPONIENDO QUE LOS VOLÚMENES CAMBIAN, MIENTRAS QUE LA TEMPERATURA PERMANECE CONSTANTE.

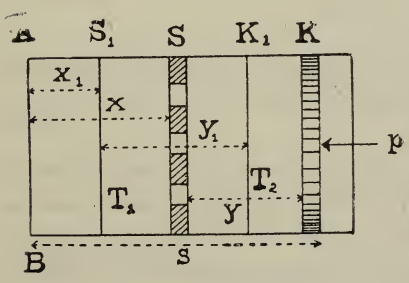



Fig. 6

Sea el cilindro (Fig. 6) con dos émbolos S y K; el émbolo S que está más próximo al fondo A B lo llamaremos émbolo alimentador, y al segundo K émbolo motor; los espacios limitados por los émbolos contienen aire.

Supongamos que en un momento dado en el espacio comprendido entre A B y el émbolo S cuya distancia es $x$, haya $G_x$ kilos de aire á la temperatura $T_1$ ; y entre los dos émbolos S y K cuya distancia es $y$, $G_y$ kilos á la temperatura $T_2$, suponiendo $T_1 > T_2$. Como el émbolo S está provisto de aberturas permitiendo comunicar los dos recipientes, la fuerza expansiva $p$ del aire será la misma en ellos y el equilibrio se establecerá cargando exteriormente el émbolo K con una presión $p$.

Si S estuviera fijo y lo suponemos impermeable al calor, como el aire en reposo es mal conductor de éste, no habrá escurrimiento de un recipiente á otro á causa de la igualdad de presiones, ó bien puede suponerse que se hace muy lentamente por las aberturas del émbolo S.

Desalojemos ahora una cantidad infinitamente pequeña S de izquierda á derecha; es claro que una cantidad muy pequeña de aire pasará del recipiente que está menos caliente al que lo está más, poniéndose á la temperatura de este recipiente. Su fuerza expansiva aumentará á causa de la mayor temperatura, tendiendo á entrar aire en el recipiente más frío modificando también allí su fuerza expansiva hasta que se logre establecer un nuevo equilibrio.

Como en los dos recipientes aumenta la presión, la distancia de K al fondo A B igual al principio á $s$ será ahora $s + ds$, y el trabajo efectuado por el gas para vencer la presión exterior $p$ será

$$d\,\mathrm{L} = \mathrm{F}\,p\,ds,$$

F siendo la sección del embolo, suponiendo constantes en cada recipiente $\mathrm{T_1}$ y $\mathrm{T_2}$ suministrando ó quitando calor convenientemente.

Si suponemos que el peso de aire que entró al recipiente de la izquierda es $d\,\mathrm{G_x}$ por ser $\mathrm{T_1} > \mathrm{T_2}$ ha debido haber cambiado de volumen; y si llamamos $v_x$ y $v_y$ los volúmenes específicos en cada recipiente, es claro que este aumento de volumen será

$$\mathrm{F}\,ds = (v_x - v_y)\,d\,\mathrm{G_x}.$$

Según la ecuación

$$pv = \mathrm{R\,T}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{R\,T_1}}{p} \qquad \text{y} \qquad v_y = \frac{\mathrm{R\,T_2}}{p},$$

puesto que $p$ permanece constante; y sustituyendo estos valores

$$F\,ds = \frac{R}{p}\,(T_1 - T_2)\,d\,G_x\,;$$

por consiguiente el trabajo será

$$d\,L = p\,F\,ds = R\,(T_1 - T_2)\,d\,G_x$$

El peso total del aire encerrado en los dos recipientes es constante; luego podemos poner

$$G_x + G_y = \text{constante};$$

ó diferenciando

$$d\,G_x = -\,d\,G_y\,;$$

pero según la figura

$$y\,F = G_y \quad v_y = G_y\,R\,\frac{T_2}{p},$$

de donde

$$G_y = \frac{y\,p\,F}{R\,T_2};$$

luego

$$d\,G_x = -\,d\,G_y = -\,\frac{F}{R\,T_2}\,d\,(y\,p);$$

y sustituyendo

$$d\,L = -\,F\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}\,d\,(p\,y)$$

Si suponemos que la presión inicial sea $p_1$ y que al principio del movimiento S diste de A B, $x_1$ y los dos émbolos entre sí $y_1$ la integración de la anterior será

$$L = -\,F\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}\int_{p_1 y_1}^{p\,y} = F\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}\,(p_1 y_1 - p\,y) \qquad (66)$$

Supongamos conocida la presión inicial y busquemos el valor de la presión final $p$ en función de $p_1$.

Según las notaciones adoptadas tendremos

$$G_x\, v_x = Fx \qquad \text{y} \qquad G_y\, v_y = Fy$$

Si llamamos G el peso total del aire, es claro que

$$G = G_x + G_y = \frac{F\,x}{v_x} + \frac{F\,y}{v_y} = \frac{p\,F\,x}{R\,T_1} + \frac{p\,F\,y}{R\,T_2} =$$

$$= \frac{p\,F}{R}\left(\frac{x}{T_1} + \frac{y}{T_2}\right)$$

Esta ecuación se aplica cualquiera que sea la posición de los émbolos; y como al principiar el movimiento

$$x = x_1, \qquad y = y_1$$

tendremos puesto que $p$ es $p_1$,

$$G = \frac{p_1\,F}{R}\left(\frac{x_1}{T_1} + \frac{y_1}{T_2}\right);$$

é igualando estos valores

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\dfrac{x_1}{T_1} + \dfrac{y_1}{T_2}}{\dfrac{x}{T_1} + \dfrac{y}{T_2}};$$

de donde

$$p = p_1 \frac{x_1\,T_2 + y_1\,T_1}{x\,T_2 + y\,T_1} \tag{67}$$

Sustituyendo este valor de $p$ en la (66) tendremos

$$L = F\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}\left(p_1\,y_1 - p_1\,y\,\frac{x_1\,T_2 + y_1\,T_1}{x\,T_2 + y\,T_1}\right);$$

y reduciendo

$$L = F\,(T_1 - T_2)\,\frac{x\,y_1 - y\,x_1}{x\,T_2 + y\,T_1} \qquad (68)$$

## VAPORES.

15.—Podemos definir un vapor diciendo que es un flúido licuable. Bajo la acción del calor, los vapores en contacto con su líquido generador se portan de manera distinta que los gases, siendo necesario separarlos de sus líquidos para lograr que se porten como gases permanentes. En la mezcla de un líquido y su vapor, hay siempre una condensación del vapor al menor enfriamiento, y una evaporación del líquido á la mas pequeña elevación de temperatura. A los vapores que están mezclados con sus líquidos se les llama saturados; mas cuando por la acción del calor, el líquido se ha evaporado completamente, pudiendo los vapores sufrir una pérdida de calor sin que haya condensación, se les llama vapores no saturados ó sobrecalentados. Si no existe líquido y el más pequeño enfriamiento trae una condensación, el vapor se dice estar seco pero no sobrecalentado. En los vapores saturados la presión $p$ es solamente función de la temperatura $t$, de tal manera que al elevarse $t$, $p$ aumenta, volviendo á su valor primitivo con la temperatura, sin depender en manera alguna del volumen específico de la mezcla. Si suponemos la unidad de peso de una mezcla de vapor y de su líquido ó sea un kilo, el peso $x$ del vapor será llamado cantidad específica del vapor ó título de la mezcla, el peso del líquido siendo $1 - x$.

Si á una mezcla de título $x$ le suministramos calor, $t$ permaneciendo constante, la cantidad de vapor $x$ irá aumentando y disminuyendo la cantidad $(1 - x)$ del líquido, debiendo llegar un momento en que $x = 1$, sin que hayan variado $t$ y $p$: pero si á partir de este instante se continúa suministrando calor, $t$ permaneciendo constante, la presión $p$ disminuirá al aumen-

tar el volumen, no siendo ya una función de la temperatura únicamente, sino también del volumen específico. En este estado el vapor empieza á sobrecalentarse y es posible que llegando á cierto grado siga las leyes de Mariotte y Gay Lussac, tendiendo á confundirse con un gas permanente.

Se dice que un vapor ha llegado á su tensión máxima cuando está saturado, pues los vapores sobrecalentados, á la misma temperatura, tienen siempre una presión menor; mientras que á la misma presión los vapores sobrecalentados tienen una temperatura más alta que los vapores saturados, viniéndoles de aquí su nombre.

## VAPORES SATURADOS.

La fuerza elástica ó presión $p$ de los vapores saturados es únicamente función de la temperatura $t$, teniéndose $p = F(t)$, sin que hasta ahora se hayan podido determinar teóricamente la forma de esta función.

La ley según la cual varían $p$ y $t$ ha sido indicada por un gran número de fórmulas empíricas, pero aquí adoptaremos la de Regnault, que es

$$lg\, p = a + b\, \alpha^{\tau} + c\, \beta^{\tau} \qquad (69)$$

$a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, siendo constantes determinadas experimentalmente, $p$ estando expresado en milímetros de mercurio y siendo $\tau = t - t_0$, $t_0$ siendo la temperatura de la experiencia que corresponde á la presión más pequeña.

Si multiplicamos la ecuación anterior por el módulo ó por

$$Lg\ 10 = 2.3026 = K,$$

quedará

$$\mathrm{L}g\ p = \mathrm{K}a + \mathrm{K}b\ a^{\tau} + \mathrm{K}c\ \beta^{\tau}.$$

Diferenciando esto, tendremos:

$$\frac{dp}{p\ dt} = \mathrm{K}b\ \mathrm{L}g\ a.a^{\tau} + \mathrm{K}c\ \mathrm{L}g\ \beta.\beta^{\tau};$$

ó puesto que

$$\mathrm{L}g\ a = \mathrm{K}\ lg\ a,$$

tendremos en logaritmos vulgares

$$\frac{dp}{p\ dt} = (\mathrm{K}^2\ b\ lg\ a)\ a^{\tau} + (\mathrm{K}^2 c\ lg\ \beta)\ \beta^{\tau};$$

y haciendo

$$\left.\begin{aligned} m &= \mathrm{K}^2\ b\ lg\ a \quad \text{y} \\ n &= \mathrm{K}^2\ c\ lg\ \beta \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$\frac{dp}{p\ dt} = m\ a^{\tau} + n\ \beta^{\tau} \tag{71}$$

Estas ecuaciones han sido calculadas y tabuladas por Zeuner para el vapor de agua y otros vapores de importancia.

## 16.—CALOR DEL LÍQUIDO Y CALOR DE EVAPORACIÓN.

Si designamos por $c$ el calor específico de un líquido cualquiera, la cantidad de calor necesaria para elevar $dt^0$ la unidad de peso será

$$dq = c\ dt;$$

y si la temperatura debe elevarse de $0^0$ á $dt^0$, tendremos

$$q = \int_0^t c\ dt \tag{72}$$

Esta cantidad será designada con el nombre de calor del líquido.

Para el agua, Regnault ha encontrado experimentalmente

$$q = t + 0.00002\ t^2 + 0.0000003\ t^3 \qquad (73)$$

obteniéndose $c$ por la fórmula

$$c = \frac{dq}{dt} \qquad (74)$$

cuyo 2º miembro se obtiene por la diferenciación de la (73).

El mismo experimentador, por la misma vía experimental, encontró el valor de $q$ para muchos otros líquidos que no tienen para nosotros la importancia del agua.

La aplicación de la fórmula de Regnault supone siempre el volumen de la unidad de peso del líquido ser una cantidad constante, cualquiera que sea la temperatura del líquido y la presión que soporta.

La anterior hipótesis equivale á despreciar la dilatación de los líquidos, haciendo cometer un error, por otra parte insignificante, dada la fuerte dilatabilidad de los vapores por el calor.

Regnault ha también determinado experimentalmente la cantidad de calor necesario para la evaporación del líquido, observando la cantidad de calor que queda libre cuando el vapor se licua á una presión constante.

La manera como debe concebirse la producción del vapor es la siguiente: La unidad de peso de un líquido á cero grados se encuentra en un cilindro provisto de un émbolo que reposa sobre la superficie del líquido y que soporta exteriormente una presión $p$, que representa aquí la presión específica del vapor que debe formarse. Al calentar el líquido, su temperatura se elevará de $0^0$ á $t^0$ antes de la producción del vapor; mas al llegar á $t$, la fuerza elástica del vapor es lo bastante grande para contrarrestar la presión exterior $p$, siendo este el momento en que el vapor al formarse rechaza el émbolo. La cantidad de calor suministrada al líquido hasta este momento es lo que se

ha llamado calor del líquido, designado por $q$. Si se continúa suministrando calor, se forma vapor cuya fuerza elástica es $p$ y el émbolo retrograda hasta que todo el líquido se evapora. La presión y la temperatura quedando invariables durante la formación del vapor la cantidad de calor $r$ que es suministrado durante esta operación se llama calor de evaporación, lo que los físicos han llamado calor latente de evaporación.

La cantidad de calor $\lambda$ que es necesario para trasformar la unidad de peso del líquido á partir de cero grados y á la presión constante $p$, en vapor saturado teniendo la presión $p$ y la temperatura $t$ se llama calor total de evaporación, teniéndose

$$\lambda = q + r \tag{75}$$

Regnault ha encontrado también experimentalmente para $\lambda$ el siguiente valor

$$\lambda = 606.5 + 0.305\ t \tag{76}$$

y por consiguiente

$$r = 606\ 5 - 0.695\ t - 0.00002\ t^2 - 0.0000003\ t^3 \tag{77}$$

Los valores anteriores son para el agua, pudiendo encontrar sus valores para distintas temperaturas en las tablas de Zeuner. Fórmulas semejantes se han deducido para otros líquidos que para nosotros tienen poco interés.

## 16.—CALORES LATENTES INTERNO Y EXTERNO.

Si podemos despreciar el cambio de volumen de un líquido sometido á la acción del calor, no así el del vapor; por consiguiente, el calor total $\lambda$ no puede encontrarse por completo en el vapor una vez formado, puesto que este vapor al dilatarse ha efectuado un trabajo y por lo mismo consumido cierta cantidad de calor, cuyo valor se trata de determinar.

Sea la unidad de peso de un líquido, $\sigma$ designando su volumen

específico; supongamos la temperatura de cero grados y la presión $p$: se trata de transformarlo en vapor saturado á la presión constante $p$ y á la temperatura $t$ correspondiente á la presión $p$. Al recibir calor el líquido adquiere primero la temperatura $t$, y como hasta este momento no hay evaporación y hemos supuesto $\sigma$ constante, el trabajo exterior es nulo; si se continúa suministrando calor, manteniendo constante la presión $p$ hasta que todo el líquido se convierta en vapor saturado, habrá un aumento de volumen, y por consiguiente producción de trabajo, dado por la fórmula siguiente:

$$L = \int p\, dv.$$

Si llamamos $s$ el volumen específico del vapor saturado á la presión $p$, $\sigma$ siendo el volumen inicial del líquido, la integración será, puesto que $p$ es constante

$$L = \int_{\sigma}^{s} p\, dv = p\,(s - \sigma).$$

A este trabajo corresponde la cantidad de calor

$$A\, p\,(s - \sigma);$$

y si hacemos con Clausius

$$s - \sigma = u$$

$s$ y $u$ siendo funciones de $t$ ó $p$, la expresión anterior se convertirá en

$$A\, p\, u.$$

Si pues, del calor total $\lambda$ suministrado al vapor, quitamos el que ha servido para producir un trabajo, el calor contenido en el vapor será

$$J = \lambda - A\, pu \qquad (78)$$

Esta cantidad se llama "calor del vapor," ó sea el exceso en calorías que la unidad de peso de un vapor saturado á la presión $p$ tiene sobre la unidad de peso del líquido generador á cero grados.

El calor latente ó calor de evaporación $r$, es la cantidad de calor que es necesario suministrar á la unidad de peso del líquido á la temperatura $t$ para transformarlo en vapor á la misma temperatura.

Si de la cantidad $r$ quitamos el calor $Apu$ tendremos un valor

$$\rho = r - Apu \tag{79}$$

que nos da el exceso de calor que hay en la unidad de peso de un vapor á la temperatura $t$ sobre la unidad de peso del líquido generador á la misma temperatura.

A esta cantidad de calor se le llama calor latente interno y á la $Apu$ calor latente externo, la suma de las dos dando $r$ ó el valor total del calor latente.

Las cantidades de calor J y $\rho$ son más cómodas que las $\lambda$ y $r$ por ser independientes de la manera como se ha efectuado la evaporación; las dos últimas suponiendo siempre que el vapor se ha producido á presión constante.

La (78) y (79) nos dan restándolas

$$J - \rho = \lambda - r = q \tag{80}$$

Consideremos la unidad de peso de una mezcla de líquido y su vapor, en la que el peso del vapor sea $x$ y el del líquido $1 - x$. El volumen específico del vapor habiendo sido designado por $s$ su volumen en la la mezcla será $x\,s$, y el del líquido

$$(1 - x)\,\sigma;$$

si pues designamos por $v$ el volumen especlfico de la mezcla, su valor será

$$v = x\,s + (1 - x)\,\sigma = x\,(s - \sigma) + \sigma;$$

y si hacemos

$$s - \sigma = u \tag{81}$$

$$v = xu + \sigma. \tag{82}$$

Al trasformarse en vapor la unidad de peso de un líquido, exige la cantidad de calor $r$; luego si en una mezcla, se ha convertido en vapor la cantidad $dx$ de líquido, habrá necesitado la cantidad de calor

$$dQ = r\, d\, x,$$

la trasformación habiendo sido hecha á temperatura, y por lo mismo á presión constante

La diferenciación de la (82) da

$$dv = u\, dx,$$

que combinada con la anterior, da

$$dQ = \frac{r}{u}\, dv. \tag{83}$$

Si en la 1ª y 2ª de las ecuaciones del grupo (III') hacemos $dp = 0$ lo que exige $dt = 0$, tendremos los siguientes que son idénticos á la (83), pues en esta se ha supuesto $p$ = constante

$$dQ = \mathrm{A}\ \mathrm{Y}\ dv, \qquad dQ = \frac{\mathrm{A}\ (a + t)}{\frac{dt}{dp}}\, dv.$$

Su comparación con la (83) nos da

$$\frac{r}{u} = \mathrm{A}\ \mathrm{Y} \tag{84}$$

$$\frac{r}{u} = \frac{\mathrm{A}\ (a + t)}{\frac{dt}{dp}} \tag{85}$$

En esta última ecuación podemos hacer

$$T = a + t \quad \text{y poner} \quad \frac{1}{\frac{dt}{dp}} = \frac{dp}{dt},$$

puesto que aquí $p$ es solo función de $t$; con lo que tendremos

$$\frac{r}{u} = A\,T\,\frac{dp}{dt} \tag{86}$$

Poniendo por $r$ su valor sacado de la (79), se tiene

$$\frac{\rho}{u} = A\left(T\,\frac{dp}{dt} - p\right) \tag{87}$$

Como $\sigma$ es despreciable en presencia de $s$ la (81) da $s = u$, pudiendo aceptar $u$ como el volumen específico del vapor; por consiguiente $\frac{r}{u}$ es el calor latente de la unidad de volumen y $\frac{\rho}{u}$ es el calor latente interno también de la unidad de volumen.

Si dividimos por $Ap$ la (86), tendremos

$$\frac{r}{Apu} = T\,\frac{dp}{p\,dt} \tag{88}$$

Los segundos miembros de las ecuaciones (86), (87) y (88) pueden calcularse por las fórmulas de Regnault, pudiendo por lo mismo calcular los primeros miembros de dichas ecuaciones.

Todas estas cantidades se encuentran calculadas en las tablas de Zeuner que damos á continuación solamente para el vavor de agua.

De los valores de las tablas ha sido sacado el de $u$, por la siguiente identidad

$$u = \left(\frac{r}{r}\right)_{u}$$

Como las cantidades $\rho$ y $Apu$ son de un uso frecuente, pueden calcularse por las fórmulas empíricas siguientes:

$$\rho = 575.40 - 0.791\ t$$

$$Apu = 31.10 + 0.096\ t - 0.00002\ t^2 - 0.0000003\ t^3$$

para el agua.

La cantidad $u$ estando tabulada, es fácil encontrar el valor de $s$ ó volumen específico de un vapor exactamente saturado, pues la fórmula (81) da

$$s = u + \sigma, \qquad \text{en la que} \qquad \sigma = 0^{mc}001$$

para el agua, cantidad admitida como constante por ser su variación muy pequeña; y para un líquido cualquiera cuya densidad con relación al agua fuera $\epsilon_1$, se tendría

$$\sigma = \frac{0.001}{\epsilon_1}.$$

Una vez conocido $s$, el peso de la unidad de volumen (1 mt. cb.) será

$$\gamma = \frac{1}{s} = \frac{1}{u + \sigma}.$$

Los valores de $\gamma$ han sido calculados por Zeuner para diversos líquidos; los correspondientes para el agua se encuentran en las tablas que damos á continuación, demostrando dichos valores que la densidad del vapor de agua con relación al aire no es una cantidad constante, sino que aumenta bastante con la presión.

Zeuner ha demostrado por medio de sus tablas, que si se toman los valores de $s$ por abscisas y las presiones correspondientes ($p$) por ordenadas, se obtiene una curva que él llama "curva de la cantidad de vapor constante," cuya ecuación es $p = F(s)$, siendo probablemente para el agua

$$p\, s^n = p_1\, s_1{}^n = \text{constante.}$$

Para los vapores saturados y secos

$$n = 1.0646 \qquad \text{y} \qquad p\, s^n = 1.704$$

cuando $p$ está dado en atmósferas.

Si se pone

$$s = \frac{1}{\gamma},$$

la ecuación anterior da

$$\gamma = \alpha\, p^{\frac{1}{n}} \tag{89}$$

en la que

$$\alpha = 0.6011 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n} = 0.9393,$$

$p$ estando dado siempre en atmósferes.

Esta fórmula aunque empírica da resultados iguales á los encontrados en las tablas y deducidos de las fórmulas termodinámicas.

## 17.—ECUACIONES FUNDAMENTALES RELATIVAS Á LA MEZCLA DE UN LÍQUIDO Y SU VAPOR.

Consideremos como de costumbre la unidad de peso de una mezcla cuyo volumen específico será

$$v = x\, u + \sigma.$$

La cantidad de calor de la mezcla lo valuaremos como sigue:

Habiendo llamado J el calor del vapor y $q$ el del líquido, puesto que hay $x$ kilos de vapor y $(1 - x)$ de líquido, el calor total será

$$x\,J + (1 - x)\,q,$$

ó bien

$$q + x\,(J - q);$$

pero según la (80), $J - q$ es el calor latente interno; luego podremos escribir la expresión anterior como sigue

$$q + x\,\rho;$$

por consiguiente en el estado inicial, el calor estará dado por

$$q_1 + x_1\,\rho_1;$$

y al haber un cambio de estado, el calor habrá aumentado en la cantidad

$$q - q_1 + x\,\rho - x_1\,\rho_1.$$

Es indudable que este calor se ha empleado en efectuar un trabajo interno, siendo por lo mismo idéntico á $U - U_1$, pudiendo escribir, convirtiendo el trabajo en unidades de calor

$$A\,(U - U_1) = q - q_1 + x\rho - x_1\,\rho_1;$$

ó bien la ecuación diferencial

$$A\,d\,U = dq + d\,(x\,\rho). \tag{90}$$

Cuando el trayecto es reversible hemos encontrado la ecuación

$$d\,Q = A\,(dU + p\,dv);$$

luego según la (90)

$$dQ = dq + d\,(x\,\rho) + A\,p\,dv \tag{91}$$

Vamos á trasformar esta ecuación de las dos maneras siguientes por conducirnos á resultados muy interesantes en el estudio de las mezclas de un vapor y su líquido generador.

Diferenciemos la (82), considerando á $\sigma$ constante:

$$dv = d\,(x\,u);$$

de donde

$$\mathrm{A}p\,dv = \mathrm{A}\,p\,d\,(x\,u);$$

y puesto que

$$d\,(p\,u\,x) = p d\,(x\,u) + (x\,u)\,dp,$$

$$\mathrm{A}\,p\,dv = \mathrm{A}\,d\,(pux) - \mathrm{A}xu\,dp;$$

y sustituyendo este valor en la (91)

$$d\,\mathrm{Q} = dq + d\,(x\,\rho) + \mathrm{A}\,d\,(pux) - \mathrm{A}\,x\,u\,dp;$$

pero

$$\rho = r - \mathrm{A}pu$$

según ecuación (79), de la que se obtiene

$$d\,(x\,\rho) = d\,(xr) - \mathrm{A}d\,(pux);$$

que combinada con la anterior da

$$d\mathrm{Q} = dq + d\,(xr) - \mathrm{A}\,x\,u\,dp.$$

La fórmula (86) es

$$\frac{r}{u} = \mathrm{A}\,\mathrm{T}\,\frac{dp}{dt},$$

que puede escribirse

$$\frac{r}{\mathrm{T}}\,dt = \mathrm{A}\,u\,dp,$$

ó multiplicándola por $x$

$$\frac{x\,r}{\mathrm{T}}\,dt = \mathrm{A}\,u\,x\,dp.$$

Si sustituimos este valor en la anterior, tendremos

$$d\mathrm{Q} = dq + d\,(x\,r) - \frac{x\,r}{\mathrm{T}}\,dt \qquad (92)$$

Como es claro que

$$d\left(\frac{x\,r}{\mathrm{T}}\right) = \frac{\mathrm{T}\,d\,(x\,r) - x\,r\,dt}{\mathrm{T}^2} = \frac{d\,(x\,r)}{\mathrm{T}} - \frac{x\,r}{\mathrm{T}^2}\,dt,$$

la anterior puede escribirse más simplemente

$$d\mathrm{Q} = dq + \mathrm{T}d\left(\frac{x\,r}{\mathrm{T}}\right). \qquad (93)$$

Hagamos ahora la siguiente trasformación, Pongamos en la (92) por $dq$ su valor

$$dq = c\,dt,$$

con lo que

$$d\mathrm{Q} = c\,dt + r\,dx + x\,dr - x\,\frac{r}{\mathrm{T}}\,dt,$$

ejecutando además la diferenciación indicada.

Si añadimos y quitamos la cantidad $x\,cdt$, tendremos,

$$d\mathrm{Q} = (1 - x)\,cdt + rdx + x\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{\mathrm{T}}\right)dt$$

y si hacemos

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{\mathrm{T}},$$

cantidad indudablemente función de la temperatura, tendremos

$$dQ = (1 - x)\, c\, dt + r dx + x\, h\, dt \qquad (94)$$

El primer término del 2º miembro nos da el calor necesario para elevar $dt^0$ el peso $(1 - x)$ de líquido; $r\, d\, x$ es la cantidad de calor necesaria para tener al estado de vapor la cantidad $d\, x$ de líquido; y el tercer término $x\, h\, dt$ representa la cantidad de calor que es trasmitida al vapor $(x)$ ya formado y por lo mismo á la unidad de peso solamente $h\, dt$.

Esta cantidad

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} \qquad (95)$$

es el calor específico del vapor saturado, calor necesario para que quede saturado después de la elevación $dt$ de temperatura.

La (95) puede escribirse como sigue en función de la temperatura por medio de las fórmulas de Regnault y de las anteriormente desarrolladas.

$$h = 0.305 - \frac{606.5 - 0.695\, t - 0.00002\, t^2 - 0.0000003\, t^3}{273 + t} \qquad (96)$$

Esta fórmula da para el vapor de agua un valor para $h$ negativo entre 0° y 210°; para el éter es positivo entre 0 y 100°; para el cloroformo es negativo entre 80° y positivo después; para la benzina es negativo antes de 140° y positivo después. Existe pues para los vapores, una temperatura á la cual el signo de $h$ se invierte pasando por cero: esta temperatura ha recibido el nombre de "temperatura de inversión," y es dada por la ecuación

$$c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = 0$$

### 18.—ENTROPIA DE UN KILOGRAMO DE LÍQUIDO.

Esta tiene por valor

$$d\,S = \frac{d\,q}{T} = c\,\frac{d\,t}{T},$$

puesto que el calor del líquido es $q$ y

$$dq = c\,d\,t.$$

Integrando tendremos

$$S = S_0 + c\,Lg\,\frac{T}{T_0} \qquad (97)$$

### 19.—ENTROPIA DE UN KILOGRAMO DE MEZCLA DE VAPOR Y DEL LÍQUIDO.

Si tenemos un kilo de líquido á la temperatura $T_0$ y suponemos que se eleva la temperatura hasta T sin dejar que haya evaporación, el aumento de entropia será según lo anterior

$$c\,Lg\,\frac{T}{T_0}.$$

Si dejamos ahora evaporar una fracción $x$ del líquido dejando el espacio necesario y suministrando el calor conveniente, la entropia crecerá

$$\int\frac{r\,d\,x}{T},$$

puesto que aquí

$$dQ = r\,d\,x;$$

mas como $r$ y T son constantes, la integración será

$$\frac{r\,x}{T};$$

y el crecimiento total de entropia será

$$c\,Lg\frac{T}{T_0}+\frac{r\,x}{T};$$

y por consiguiente la entropia será

$$S = S_0 + c\,Lg\frac{T}{T_0}+\frac{r\,x}{T} \qquad (98)$$

y si todo el líquido se evapora

$$S = S_0 + c\,Lg\frac{T}{T_0}+\frac{r}{T}$$

20.—LÍNEAS ISOTERMICAS É ISODINÁMICAS DE UNA MEZCLA DE VAPOR Y SU LÍQUIDO, Y LÍNEAS DE UNA CANTIDAD CONSTANTE DE VAPOR.

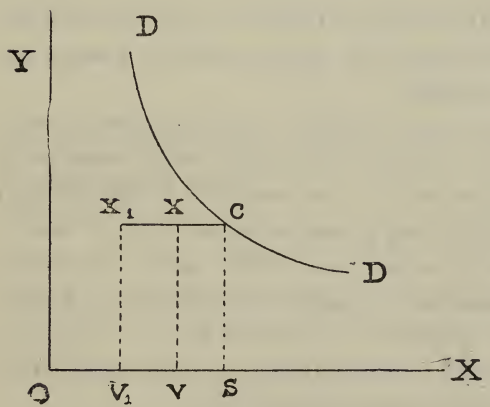



Fig. 7

Si como dijimos anteriormente, llevamos (Fig. 7) como abscisas los valores de $s$, volumen específico del vapor saturado y seco, y por ordenadas las presiones correspondientes, obtendremos la curva D D cuya ecuación es de la forma

$$p\,s^n = \text{constante};$$

y como el vapor está saturado y seco, la curva D D corresponde á un kilógramo de vapor, llamado por esta razón por Zeuner "curva de la cantidad de vapor constante."

Si consideramos ahora la unidad de peso de una mezcla de vapor y su líquido, su volumen específico será

$$v = x\,s + (1 - x)\,\sigma,$$

según fórmula (82); y puesto que para

$$x = 1, \qquad v = s,$$

para

$$x < 1, \qquad v < s,$$

suponiendo la misma presión $p$. Llevemos pues el volumen de la mezcla de 0 á $v$, el punto $v$ quedando á la izquierda de $s$; mas como la presión debe ser la misma que la correspondiente al vapor saturado y seco, el punto $x$ quedará fuera de la curva D D y á la izquierda; por consiguiente, la curva D D será el límite de los vapores saturados, de manera que si al construir un punto caracterizado por su volumen específico y presión, queda á la derecha de la curva D D, el vapor estará sobrecalentado.

Como es muy importante poder distinguir si los vapores están saturados ó sobrecalentados, se comprende de cuanta importancia es la curva de Zeuner.

Hemos dicho que cuando $p$ y $v$ varían, $t$ permaneciendo constante, á la curva obtenida se llama isotérmica; mas como en el caso de los vapores saturados, la constancia de $t$ trae consigo la de $p$, el lugar geométrico será una paralela al eje de las $x$; por consiguiente, cuando el volumen específico pasa del estado inicial $o\,v_1$ al $o\,v$, la cantidad de vapor variando de $x_1$ á $x$, el lugar geométrico será la paralela $x$, $c$ al eje de las $x$.

El trabajo externo estará representado en este caso por el area del rectángulo $v_1\,x_1\,x\,v$ y tendrá por valor

$$L = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p\,(v - v_1);$$

pero

$$v = x\,u + \sigma \qquad y \qquad v_1 = x_1\,u + \sigma,$$

pues al permanecer constante $t$, quedarán igualmente constantes $u$, $q$, $\rho$ y $r$, cantidades que solo dependen de la temperatura; por consiguiente tendremos

$$L = p\,u\,(x - x_1) \tag{99}$$

La cantidad de calor por suministrar se obtendrá integrando la ecuación (93)

$$dQ = dq + T d\left(\frac{x\,r}{T}\right);$$

ó sea

$$Q = T\int_{x_1}^{x} d\left(\frac{x\,r}{T}\right) = r\,(x - x_1), \tag{100}$$

puesto que $q$, $r$ y T son constantes.

Para obtener la ecuación de la curva isodinámica, hagamos $dU = o$ en la ecuación (90), obteniéndose

$$dq + d\,(x\rho) = o;$$

si pues pasamos del estado inicial $q_1$, $x_1$, $\rho_1$, al final $q$, $x$, $\rho$, la integración será

$$q - q_1 + x\rho - x_1\,\rho_1 = 0 \tag{101}$$

ecuación de la curva isodinámica, á la que deben unirse las ecuaciones

$$v = x\,u + \sigma \qquad y \qquad v_1 = x_1\,u_1 + \sigma,$$

para poder construirla.

No se ha podido encontrar teóricamente otra forma para esta ecuación; mas Zeuner ha podido comprobar que puede representarse por la siguiente

$$pv^{\nu} = \text{constante}$$

el valor medio de $\nu$ siendo

$$\nu = 1.0456.$$

## 21.—LÍNEAS ADIABÁTICAS DE UNA MEZCLA DE VAPOR Y DE SU LÍQUIDO GENERADOR.

Hemos dicho que si $p$ y $v$ varían de tal manera que el vapor ni pierda ni reciba calor, se obtiene una curva llamada adiabática.

Si hacemos pues $dQ = 0$ en la (93), se tendrá

$$0 = dq + \mathrm{T}d\left(\frac{x\,r}{\mathrm{T}}\right),$$

ó bien

$$0 = \frac{dq}{\mathrm{T}} + d\left(\frac{x\,r}{\mathrm{T}}\right).$$

Integrando

$$\int_o^t \frac{dq}{\mathrm{T}} + \frac{x\,r}{\mathrm{T}} = \text{constante}.$$

Haciendo

$$\int_o^t \frac{dq}{\mathrm{T}} = \tau \tag{102}$$

cuyos valores damos á continuación para distintas temperaturas, tendremos

$$\frac{x\,r}{\mathrm{T}} + \tau = \text{constante} = \frac{x_1\,r_1}{\mathrm{T}_1} + \tau_1 \tag{103}$$

como ecuación de la línea adiabática.

Cuando no se requiere gran precisión puede calcularse $\tau$ como sigue suponiendo constante $c$ é igual á 1,0224.

$$\tau = \int_o^t \frac{c\,dt}{T} = c\ \mathrm{L}g\ \frac{T}{a}.$$

Según esta consideración, la (103) puede escribirse

$$\frac{x\,r}{T} + c\ \mathrm{L}g\ \frac{T}{a} = \frac{x_1\,r_1}{T_1} + c\ \mathrm{L}g\ \frac{T_1}{a},$$

ó

$$\frac{x\,r}{T} = \frac{x_1\,r_1}{T_1} + c\ \mathrm{L}g\ \frac{T_1}{T} \qquad (104)$$

A las ecuaciones anteriores deben unirse las siguientes:

$$v_1 = x_1\,u_1 + \sigma \qquad \text{y} \qquad v = x\,u + \sigma$$

que permiten calcular $v_1$ y $v$, deduciendo la relación de expansión

$$\epsilon = \frac{v_1}{v}.$$

Para aclarar lo anterior resolvamos el siguiente problema:

Se tiene un kilo de vapor de agua saturado y seco á 4 atmósferas de presión, y se deja dilatar hasta que la presión sea de una atmósfera; ¿qué cantidad de vapor existe al final y cual es la relación de expansión?

Puesto que el vapor está saturado y seco en el estado inicial $x_1 = 1$; correspondiendo, según las tablas para 4 atmósferas, los valores siguientes

$$\tau_1 = 0.42711, \qquad \frac{r_1}{T_1} = 1.21129, \qquad u_1 = 0.4474.$$

El volumen inicial será pues

$$v_1 = x_1\,u_1 + \sigma = 0.4474 + 0.001 = 0.^{\text{m. cb.}}4484;$$

y como

$$\frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 = 1.21129 + 0.42711 = 1,63840,$$

la (103) quedará

$$\frac{x r}{T} + \tau = 1,63840.$$

La presión final siendo una atmósfera, y para esta presión correspondiendo los siguientes valores

$$\tau = 0.31356; \qquad \frac{r}{T} = 1.43834;$$

luego

$$x \times 1.43834 = 1.63840 - 0.31356 = 1\ 32484;$$

de donde

$$x = \frac{1.32484}{1.43834} = 0.9211.$$

Puesto que $x < x_1$ hay menos vapor al final, habiendo habido una condensación.

Como para una atmósfera

$$u = 1.6494, \quad v = 0.9211 \times 1.6494 + 0.001 = 1.^{\text{m.cb.}}5203.$$

La relación de expansión será pues

$$\epsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{1.5203}{0.4484} = 3\ 39.$$

La cantidad de vapor condensado es $1 - x = 0,^{\text{k}}0789$, y aunque pequeña influye en el valor de $\epsilon$, pues si no hubiere habido condensación

$$v = u + \sigma = 1.6504,$$

y

$$\epsilon = \frac{1.6504}{0.4484} = 3.68.$$

Busquemos el trabajo correspondiente en una expansión adiabática.

La ecuación (2) es

$$dQ = A\ (dU + dL);$$

si pues hacemos $dQ = 0$

$$A\ d\ L = -\ A\ d\ U;$$

y según la (90)

$$A\ d\ L = -\ dq - d\ (x\ \rho);$$

ó integrando

$$A\ L = q_1 - q + x_1\ \rho_1 - x\ \rho \qquad (105)$$

Determinemos el trabajo del ejemplo anterior.

Para 4 atmósferas, tenemos según las tablas

$$x_1 = 1; \qquad q_1 = 145.310; \qquad \rho_1 = 461.496;$$

y para una atmósfera

$$x = 0.9211; \qquad q = 100.500; \qquad \rho = 496,300$$

Sustituyendo en la (105)

$$A\ L = 44.810 + 4.354 = 49.164 \text{ calorías};$$

de donde

$$L = 20,846 \text{ km.}$$

Zeuner ha demostrado prácticamente que la ecuación adiabática puede ponerse bajo la forma siguiente

$$p\ v^{\mu} = p_1\ v_1{}^{\mu} = \text{constante} \qquad (106$$

pudiendo calcularse $\mu$ por la siguiente fórmula empírica

$$\mu = 1.035 + 0.100\ x_1 \qquad (107)$$

$x_1$ siendo la cantidad de vapor que hay en la mezcla. La anterior fórmula solo da valores exactos para $x_1$ comprendida entre 0.7 y 1.

Una vez calculada $\mu$ por esta fórmula, el trabajo se calucula por las fórmulas (50) encontradas para los gases, poniendo $\mu$ en lugar de K.

En el ejemplo anterior

$$x_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \mu = 1.135,$$

luego

$$L = \frac{1}{\mu - 1}\ p_1\ v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} \right]$$

$$v_1 = 0.4484 \qquad p_1 = 4 \times 10334 = 41336$$

$$\left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{0.135}{1.135}} = 0.849$$

$$L = 7.407 \times 41336 \times 0.4484 \times 0.151 = 20730 \text{ km.}$$

resultado sensiblemente igual al anterior.

### EJEMPLO.

I. Un líquido de densidad 0.8 y cuya densidad de vapor saturado es 2.1 á 50°, tiene á esta temperatura una fuerza elástica equilibrada por $0,^{m}608$ de mercurio; se sabe además que $\frac{dp}{dt} = 21,^{mm}858$ á 50°. Se desea calcular el trabajo externo á presión y temperatura constantes y el calor latente de evaporación.

El calor latente externo es $Apu$, luego el trabajo externo será

$$L = pu = p\,(v - \sigma)$$

pues

$$v = x\,u + \sigma, \qquad \text{siendo} \qquad x = 1$$

para el vapor saturado y seco.

Pero

$$v = \frac{1}{\gamma},$$

y para el vapor considerado

$$\gamma = 2.1 \times 1.293.$$

Para el agua

$$\sigma = 0.001;$$

y para el líquido considerado

$$\sigma = \frac{0.001}{0.8} = \frac{1}{800},$$

luego

$$L = p\left(\frac{1}{2.1 \times 1.293} - \frac{1}{800}\right) = \frac{0.608}{0.760}\ 10334\ (0.3690 - 0.0012) =$$

$$= 3040 \text{ km. por kilo.}$$

El calor latente será según fórmula (86)

$$r = A\ T\ \frac{dp}{dt}\,u;$$

y sustituyendo

$$r = \frac{1}{424} \times 323\ \left(\frac{21.858}{760.000}\ 10334\right) 0{,}3678 = 83{,}0 \text{ cal.}$$

por kilogramo.

22.—¿Cómo se porta una mezcla de vapor y de líquido cuando se le suministra ó se le quita calor, el volumen quedando constante?

Supongamos la unidad de peso de una mezcla contenida en vaso cerrado, la cantidad específica del vapor siendo $x_1$, $t_1$ su temperatura y $p_1$ la presión. El volumen específico será

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma$$

según fórmula (82).

Cuando por razón del cambio, la temperatura es $t$, $p$ la presión, y $x$ la cantidad de vapor, se tendrá para el volumen específico

$$v = x u + \sigma.$$

Según la hipótesis $v = v_1$, y como $\sigma$ se supone constante, se deduce

$$x = \frac{u_1}{u} x_1. \tag{108}$$

Puesto que el volumen es constante $dL = 0$, y la (90) y (91) dan

$$dQ = A\, d\, U = dq + d\,(x\rho);$$

é integrando

$$Q = A\,(U - U_1) = q - q_1 + x\rho - x_1 \rho_1;$$

y por la (108)

$$Q = A\,(U - U_1) = q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right). \tag{109}$$

Supongamos que á la mezcla se le suministra calor: la temperatura aumentará, así como la presión y evaporación, llegando un momento en que todo el líquido se habrá transformado en vapor; en este instante $x = 1$, y llamemos $t_2$ la temperatura y $p_2$ la presión correspondiente.

La (108) dará en este caso

$$u_2 = u_1 x_1 \tag{110}$$

y la (109) será

$$Q = q_2 - q_1 + x_1 u_1 \left( \frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho_1}{u_1} \right) \tag{111}$$

Si á partir de este instante se sigue suministrando calor, la temperatura aumentará; pero el vapor se habrá sobrecalentado y el cambio de estado no se sujeta á las leyes de los vapores saturados.

**EJEMPLO.**

Calcular el número de calorías necesario para llevar de cero á 200 grados, 100 kilos de agua encerrados en una caldera de 200 litros.

Para el estado inicial tendremos según las tablas

$$t_1 = 0, \qquad q_1 = 0, \qquad \frac{\rho_1}{u_1} = 2.7.$$

Si en el estado inicial hay $x_1$ kilos de vapor y $1 - x_1$ de líquido, el volumen V del recipiente será según fórmula (82)

$$V = x_1 u_1 + \sigma$$

ó simplemente

$$x_1 = \frac{V}{u_1} = \frac{0.200}{210.7} = 0.00095.$$

A partir del momento en que $u_2$ valga lo indicado por la fórmula (110), el vapor empezará á sobrecalentarse; y este valor es

$$u_2 = 210.7 \frac{0.200}{210.7} = 0.2;$$

pero este valor corresponde á la temperatura de $177^0.5$; por consiguiente solo hasta esta temperatura es correcta la aplicación de la fórmula (111). Según las tablas para esta temperatura

$$q_2 = 179.8; \qquad \frac{\rho_2}{u_2} = 2168.3$$

luego

$$Q = 179,8 + 0.2\ (216.83 - 2.7) = 613 \text{ calorías.}$$

A partir de este momento el vapor está sobrecalentado y la temperatura continúa elevándose, $p$ y $v$ variando probablemente según la ley de Zeuner expresada por la ecuación

$$pv = 0.0049\ T - 0.01863\ p^{\frac{1}{4}};$$

por consiguiente, aceptando con este sabio $C_v = 0.35$, el cambio de temperatura de $177.^05$ á $200^0$ exigirá la cantidad de calor

$$Q' = c\ (t' - t) = 0,35\ (200 - 177.5) = 7.^{\text{cal}}9,$$

cantidad que añadida á la anterior da en total $620^{\text{cal}}9$ por kilo; ó bien por 100 kilos 62090 calorías.

Para ver la importancia del sobrecalentamiento del vapor en la solución del problema anterior, resolvamos el caso en el supuesto de que no hubiere habido sobrecalentamiento.

La fórmula (111) nos da

$$Q = q_2 - q_1 + 0.2 \left( \frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho_1}{u_1} \right)$$

Para 200 grados

$$q_2 = 203.2; \qquad \frac{\rho_2}{u_2} = 3317.8$$

para 0°

$$q_1 = 0.0; \qquad \frac{\rho_1}{u_1} = 2.7;$$

luego Q = 203.2 + 0,2 (3317.8 — 2.7) = 866 calorías por un kilo, ó por 100 = 86600 calorías.

Según Zeuner la energía interna de un vapor sobrecalentado es para un kilo

$$U = 476.11 + 0.007059\ p\ v'$$

Es indudable que $v' = 0.2$ pues al evaporarse toda el agua, el kilo de vapor ocupará el volumen del recipiente; y como la temperatura del vapor es de 200°, busquemos cual es la presión que corresponde á esta temperatura.

La fórmula de Zeuner da para este caso

$$p.\ 0.2 = 0.0049 \times 473 - 0.01863\ p^{\frac{1}{4}},$$

de donde

$$p + 0.093\ p^{\frac{1}{4}} = 11.6$$

Para $p = 10$ atmósferas, el primer miembro vale 10.2; para $p = 11.4$ es sensiblemente 11.6, pudiendo aceptar este valor para $p$ ó en kilos por mt. cd. 117808; y por consiguiente U = = 476.11 + 0.0071 × 117808 × 0.2 = 643.$^{cal}$00 ó por 100 kilos 64300, resultado muy comparable á la solución dada primeramente, dado que la fórmula de Zeuner es solo aproximada.

Busquemos ahora según qué ley la fuerza elástica del vapor aumenta en una caldera, con el tiempo, cuando se interrumpe en cierto instante la salida del vapor, continuando el calentamiento.

Supongamos que en el momento de cerrar las válvulas el peso de la mezcla de vapor y de líquido sea de M kilos, conteniendo $x_1$ M kilos de vapor, siendo $t_1$ y $p_1$ la temperatura y presión correspondientes. Después de haber transcurrido el tiempo $\theta$, supongamos que el peso del vapor sea $x$ M y $t$ y $p$ su temperatura y presión.

La fórmula (109) da para la cantidad de calor

$$Q = M\left[q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right)\right].$$

Si expresamos á $\theta$ en minutos y suponemos que la cantidad de calor que se suministra á la caldera por minuto es $Q_0$, es claro que

$$\theta Q_0 = Q$$

en el momento en que la temperatura es $t$ y la presión $p$; luego

$$\theta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{M}{Q_0}\left[q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right)\right]. \qquad (112)$$

En la práctica puede simplificarse esta fórmula despreciando el término multiplicado por $x_1$ y haciendo

$$q = c\,t, \qquad q_1 = c\,t_1,$$

con lo que

$$\theta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{M\,c\,(t - t_1)}{Q_0}. \qquad (113)$$

**EJEMPLO.**

Supongamos una caldera de 11 metros cúbicos de capacidad, y de 18 metros cuadrados de superficie de calentamiento, produciendo en marcha normal 25 kilos de vapor por ahora y por metro cuadrado de superficie de calentamiento á la presión de 5 atmósferas. El agua ocupa en la caldera los 0.6 de su capacidad, teniendo al alimentarla la temperatura de 15°. Si se interrumpe la salida del vapor, continuando el calentamiento normal, ¿en qué tiempo la presión llegará á 10 atmósferas?

La cantidad de vapor producida por minuto será

$$\frac{18 \times 25}{60} = 7,^{k}5.$$

Para 5 atmósferas de presión

$$\lambda = q + r = q + \rho + Apu = 652.^{cal}93$$

si el agua estuviera á cero grados; mas como está á $15^{0}$ y para esta temperatura $q_0 = 15.005$,

$$\lambda = 637.^{cal}93 \text{ por kilo: luego por } 7.^{k}5$$

$$Q_0 = 7.5 \times 637.93 = 4784.^{cal}5 \text{ por minuto.}$$

El volumen del agua será

$$0.6 \times 11 = 6.^{mcb.}60 \quad \text{y el del vapor} \quad 4.^{mtcb.}40.$$

Como un metro cúbico de agua pesa 1000 kilos, el peso total del agua será 6600 kilos; y á la presión de 5 atmósferas el metro cúbico de vapor pesando $2.^{k}75$, el peso del vapor sesá

$$4.4 \times 2.75 = 12.^{k}10;$$

por consiguiente el peso de la mezcla será $M = 6612{,}10$ kilos.

La cantidad específica del vapor será

$$x_1 = \frac{12.10}{6612.10} = 0.00183$$

Para 5 atmósferas

$$t_1 = 152^{0}22$$

y para 10 atmósferas

$$t = 180.31;$$

si aceptamos un valor medio para $c = 1.0224$, la fórmula (113) da

$$\theta = \frac{6612.10.\ 1.0224.\ (180.31 - 152.22)}{4784.5} = 39.^{minutos}7$$

## TEORIA DE LOS CONDENSADORES.

23.—Resolvamos primero la siguiente cuestión.

Se comunican entre sí dos recipientes que contienen mezclas de vapor y de líquido de la misma especie; se desea saber cuál es el estado final de la masa total, suponiendo que al principio las cantidades específicas del vapor, las presiones y temperaturas sean diferentes en los dos recipientes, y que no haya adición ni sustracción de calor.

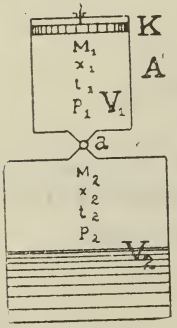



Fig. 8

El recipiente A (Fig. 8) contiene $M_1$ kilos de mezcla, en la que $x_1$ $M_1$ es la cantidad de vapor y $(1 - x_1)$ $M_1$ la de líquido; $p_1$ y $t_1$ siendo su presión y temperatura y $V_1$ su volumen. En el recipiente B de volumen $V_2$, $M_2$ es el peso de la mezcla. $x_2$ $M_2$ el del vapor, $(1 - x_2)$ $M_2$ el del líquido y $p_2$ y $t_2$ su presión y temperatura.

Si se abre la llave $a$ y se dejan comunicar entre sí los dos recipientes, la temperatura y presión llegarán á ser iguales en ambos, pero sus valores serán distintos de los iniciales.

Representémoslos por $t$ y $p$ y designemos por $x$ la cantidad específica del vapor distinta de $x_1$ y $x_2$: $M_1 + M_2$ será el peso total de mezcla en la que habrá $x(M_1 + M_2)$ cantidad de vapor y $(1 - x)$ $(M_1 + M_2)$ de líquido.

Los volúmenes de los recipientes A y B serán

$$V_1 = M_1 (x_1 u_1 + \sigma)$$

$$V_2 = M_2 (x_2 u_2 + \sigma).$$

Después de la mezcla, el volumen total será

$$V = (M_1 + M_2)(x u + \sigma);$$

debiendo tenerse

$$V = V_1 + V_2;$$

ó bien igualando sus valores

$$(M_1 + M_2)\, x\, u = M_1\, x_1\, u_1 + M_2\, u_2\, x_2 \qquad (114)$$

siendo incógnitas $x$ y $u$.

La ecuación (90) integrada entre las temperaturas $t = 0$ y $t_1$ nos da

$$A\, U_1 = M_1\, (A\, U_0 + q_1 + x_1\, \rho_1),$$

puesto que á cero grados $q_0 = 0$ y $\rho_0 = 0$; designando $U_0$ el trabajo interno de la unidad de peso á cero grados, y $U_1$ el trabajo interno de la masa total $M_1$ á la temperatura $t_1$.

De la misma manera podemos escribir

$$A\, U_2 = M_2\, (A\, U_0 + q_2 + x_2\, \rho_2);$$

y después de la mezcla siendo U el trabajo interno de toda la masa.

$$A\, U = (M_1 + M_2)\, (A\, U_0 + q + x\, \rho).$$

Como no hay adición ni sustracción de calor, así como tampoco trabajo externo, deberemos tener

$$U = U_1 + U_2;$$

y según las ecuaciones anteriores

$$(M_1 + M_2)\, (q + x\, \rho) = M_1\, (q_1 + x_1\, \rho_1) + M_2\, (q_2 + x_2\, \rho_2). \qquad (115)$$

No es necesario conocer $M_1$ y $M_2$ sino solo su relación $\frac{M_2}{M_1} = K$; y si eliminamos $x$ entre las (114) y (115) tendremos

$$(1 + K)\, q + (1 + K)\, x\, \rho = q_1 + x_1\, \rho_1 + K\, (q_2 + x_2\, \rho_2)$$

$$(1 + K)\, x\, u = x_1\, u_1 + K\, x_2\, u_2 \qquad (116)$$

$$(1 + K)\, q + (x_1\, u_1 + K\, x_2\, u_2)\, \frac{\rho}{u} = q_1 + x_1\, \rho_1 +$$

$$+ K\, (q_2 + x_2\, \rho_2). \qquad (117)$$

Para ver como se hace uso de estas fórmulas, supongamos que en A hay $M_1$ kilos de vapor saturado y seco á 1.5 atmósferas de presión, y en B, 24.38 $M_1$ kilos de agua y vapor á una presión de 1/10 de atmósfera, siendo

$$x_2 = 0.0095.$$

Según las tablas podemos escribir

$q_1 = 112.41$; $\rho_1 = 487.01$; $u_1 = 1.1258$ para 1 1/2 atmósferas, y

$q_2 = 46.28$; $\rho_2 = 538.95$; $u_2 = 14.5508$ para 1/10 de atmósfera;

y sustituyendo estos valores, las (116) y (117) dan

$$x\, u = 0.1771$$

$$q + 0.1771\, \frac{\rho}{u} = 72.99.$$

Esta última ecuación se resuelve por tanteos por medio de los valores de las tablas, advirtiendo que la presión final debe diferir poco de la que existía en el recipiente más frío antes de la mezcla. Suponiendo pues que la presión resultante sea de 0.2 de atmósfera, como para esta presión

$$q = 60.59 \quad \text{y} \quad \frac{\rho}{u} = 69.95,$$

el primer miembro vale 72.98; pudiendo aceptar, pues, en vista de que el valor obtenido apenas difiere del segundo miembro,

que la presión resultante es la de 0,2 de atmósfera. En caso de que no satisfaga la presión de 0.2 de atmósfera, se ensaya otro valor ya más aproximado y sugerido por la aproximación numérica obtenida.

Como para esta presión $u = 7{,}5421$, resulta

$$x = 0.0235$$

para la cantidad específica del vapor después de la mezcla.

Los volumenes de los recipientes pueden ya calcularse,

$$V_1 = M_1 (x_1 u_1 + \sigma) = 1.^{\text{m cb.}} 1268 \; M_1$$

$$V_2 = M_2 (x_2 u_2 + \sigma) = 3.3945 \; M_1 ;$$

y su relación será

$$\frac{V_2}{V_1} = 3.$$

Consideremos el problema anterior desde otro punto de vista suponiendo que al principio están reunidos los dos recipientes, y siendo conocidos $x$, $u$, y $\frac{\rho}{u}$; y supongamos que se desea conocer qué cantidad de calor debe suministrarse á los dos recipientes para que su presión $p$ alcance el valor $p_1$ que había al principio en el primer recipiente.

Como el calentamiento tiene lugar aquí á volumen constante, la fórmula (109) nos da

$$Q = (M_1 + M_2) \left[ q_1 - q + x\, u \left( \frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho}{u} \right) \right] =$$

$$= (M_1 + M_2) \left( q_1 - q + x\, u \frac{\rho_1}{u_1} - x\, \rho \right).$$

Poniendo por $x\, u$ y $x\, \rho$ los valores sacados de las ecuaciones (114) y (115), tendremos

$$Q = (M_1 + M_2)\left(q_1 - q + \frac{M_1 x_1 u_1 + M_2 x_2 u_2}{M_1 + M_2}\frac{\rho_1}{u_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_1 (q_1 + x_1 \rho_1) + M_2 (q_2 + x_2 \rho_2)}{M_1 + M_2} + q\right) = q_1 (M_1 + M_2) +$$

$$+ M_1 x_1 u_1 \frac{\rho_1}{u_1} + M_2 x_2 u_2 \frac{\rho_1}{u_1} - M_1 q_1 - M_1 x_1 \rho_1 - M_2 q_2 -$$

$$- M_2 x_2 \rho_2 = M_2 (q_1 - q_2) + M_2 x_2 u_2 \left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right);$$

de donde

$$Q = M_2\left[q_1 - q_2 + x_2 u_2 \left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right)\right]. \qquad (118)$$

Esta cantidad de calor es independiente de $M_1$ y precisamente la cantidad de calor necesaria para que antes de la mezcla la presión del segundo recipiente se iguale á la del primero. Este resultado es por otra parte evidente.

Es indudable que la cantidad de calor que debe quitarse al primer recipiente para que la presión se iguale al del segundo será

$$Q = M_1\left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right)\right] \qquad (119)$$

## 24.—TEORÍA DE LOS CONDENSADORES DE PAREDES ENFRIADAS EXTERIORMENTE Ó DE SUPERFICIE.

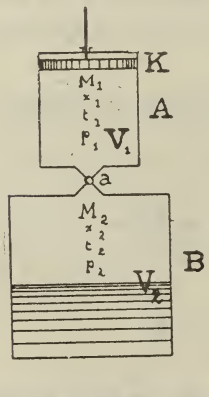



Fig. 9

En la (Fig. 9), A nos representa el cilindro de una máquina de vapor cuyo émbolo K se encuentra al fin de su curso, y comunicado con el condensador B por medio de la llave $a$ que supondremos cerrada al principio. En A hay $M_1$ kilos de una mezcla de vapor y de agua á la presión $p_1$ y á la temperatura correspondiente $t_1$, $x_1$ siendo la cantidad de vapor y $V_1$ el volumen del cilindro. El contenido del condensador B, está representado por las mismas literales, pero afectadas del índice 2.

Al abrirse la llave $a$ y comunicarse los dos

recipientes en un instante infinitamente pequeño, en el que podemos suponer que no hay pérdida de calor, la presión resultante $p$, temperatura $t$ y cantidad específica del vapor $x$, serán las del problema anterior; pero á causa del agua fría que baña continuamente las paredes exteriores del condensador B, el calor será sustraído, manteniéndose la presión constante $p_2$ del condensador durante todo el tiempo que el émbolo K baja rechazando en B su contenido. Busquemos qué cantidad de calor hemos de quitar para que esto se verifique y determinemos la masa de vapor y de líquido que se encuentran en el condensador al fin de la operación.

En el momento de la abertura de la llave $a$ cuando K empieza á descender, su velocidad es insensible, habiendo en este momento en los dos recipientes la presión $p$, siendo $x$ la cantidad de vapor; la sustracción del calor, al empezar el descenso, se verifica pues á volumen constante, debiendo tener según la fórmula (119)

$$Q_1 = M_1 \left[ q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left( \frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2} \right) \right] \qquad (120)$$

y la cantidad específica del vapor $x'_2$ común á los dos recipientes, después de haber quitado la cantidad $Q_1$ de calor será según la fórmula (108)

$$x'_2 = \frac{x\,u}{u_2} \qquad (121)$$

El émbolo K al bajar, comprime la masa $M_1 + M_2 = M$ á la presión constante $p_2$ del condensador, reduciéndose el volumen de $V_1 + V_2$ á $V_2$.

Si llamamos $x''_2$ la cantidad específica del vapor al fin de esta operación, la cantidad $Q_2$ de calor sustraído á presión coustante será

$$Q_2 = M\, r_2 (x'_2 - x''_2) \qquad (122)$$

El volumen inicial será

$$V_1 + V_2 = M\,(x'_2\,u_2 + \sigma),$$

y el final

$$V_2 = M\,(x''_2\,u^2 + \sigma;$$

de donde

$$V_1 = M\,u_2\,(x'_2 - x''_2\,) \qquad (123)$$

Eliminando á M entre la (122) y (123), se tiene

$$Q_2 = \frac{r_2}{u_2}\,V_1\,;$$

pero el volumen $V_1$ tiene también por valor

$$V_1 = M_1\,(x_1\,u_1 + \sigma);$$

y despreciando á $\sigma$

$$V_1 = M_1\,x_1\,u_1\,,$$

con lo que

$$Q_2 = M_1\,x_1\,u_1\,\frac{r_2}{u_2} = M_1\,x_1\,u_1\left(\frac{\rho_2}{u_2} + A\,p_2\right). \qquad (124)$$

El calor total quitado será

$$Q = Q_1 + Q_2 = M_1\left[q_1 - q_2 + x_1\,u_1\left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right) + \right.$$

$$\left. + x_1\,u_1\left(\frac{\rho_2}{u_2} + A\,p_2\right)\right];$$

de donde

$$Q = M_1\,[q_1 - q_2 + x_1\,(\rho_1 + A\,u_1\,p_2\,)] \qquad (125)$$

Si suponemos que el agua que enfría las paredes del condensador tenga al principio la temperatura $t_0$ y al final $t'_0$, y si

$M_0$ es el peso de esta agua por golpe de émboio, la cantidad de calor Q que ha quitado será

$$Q = M_0 (q'_0 - q_0).$$

$q'_0$ y $q_0$ siendo el calor correspondiente del líquido á sus temperaturas final é inicial.

Igualando estos dos valores de Q tendremos

$$M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1 (\rho_2 + A\, p_2 u_1)}{q'_0 - q_0} M_1 \qquad (126)$$

La cantidad específica $x''_2$ del vapor se determina como sigue:

Si en la fórmula (123), ponemos $V_1 = M_1 x_1 u_1$ tendremos

$$M_1 x_1 u_1 = M u_2 (x'_2 - x''_2);$$

de donde

$$M u_2 x''_2 = M u_2 x'_2 - M_1 x_1 u_1 ;$$

y según la (121)

$$M u_2 x''_2 = M x u - M_1 x_1 u_1 ;$$

pero poniendo por $M x u$ su valor dado por la fórmula (114) tendremos

$$M u_2 x''_2 = M_2 x_2 u_2 ,$$

ó

$$(M_1 + M_2) x''_2 = M_2 x_2 \qquad (127)$$

Ecuación que demuestra que al fin de la operación la cantidad específica del vapor ha cambiado, pero permaneciendo constante la cantidad de vapor que había al principio en el condensador antes de la mezcla; por consiguiente todo el peso $M_1$ de la mezcla del cilindro se encuentra en el condensador al estado

líquido á la temperatura $t_2$. El papel de la bomba en estos condensadores se reduce á sacar $M_1$ kilos de agua y llevarlos á la caldera, cerrándose de este modo el ciclo.

En la práctica puede simplificarse la (126) suponiendo $x_1 = 1$, despreciando el término $A\, p_2\, u$ que es muy pequeño y poniendo en lugar del calor del líquido su temperatura correspondiente, lo que equivale á aceptar $c = 1$; teniéndose así

$$M_0 = \frac{t_1 + \rho_1 - t_2}{t'_0 - t_0} M_1 \qquad (128)$$

En esta fórmula $t_1$ es la temperatura correspondiente al final de la expansión, cuando el émbolo concluye su carrera.

### EJEMPLO.

Se desea que en un condensador exista la presión $p_2 = 0.^{\text{atmos.}}1$, tomando el agua que ha de enfriar las paredes á $t_0 = 15°$ y saliendo esta agua á $t_0 = 35°$; en el supuesto de que la presión al terminar la expansión sea $1\frac{1}{2}$ atmósferas, ¿qué cantidad de agua debe alimentar el condensador, $M_1$ siendo el consumo de vapor por golpe de émbolo?

$$M_0 = \frac{112 + 487 - 46}{55 - 15} M_1 = 27.7\, M_1 \text{ kilos de agua.}$$

La experiencia ha indicado que el volumen del condensador de superficie debe ser el tercio ó cuando mucho la mitad del volumen del cilindro, aunque en rigor sus dimensiones deben estar subordinadas al gasto de vapor por golpe de émbolo.

El condensador de superficie se compone ordinariamente de tubos de latón de pequeño diámetro, y de una longitud igual hasta 100 veces su diámetro, colocados en un recipiente de fundición ó de latón teniendo una forma adecuada. Su superficie refrigerante total es generalmente igual á la mitad de la superficie de calentamiento de las calderas si funcionan con tiro

natural, pudiendo calcularse á razón de 14 á 30 decímetros cuadrados por caballo indicado. La superficie refrigerante es más activa cuando es vertical ó inclinada que cuando está horizontal, y esto en una proporción que puede elevarse hasta el $\frac{1}{3}$.

Algunos constructores calculan la superficie de calentamiento en función de la potencia indicada, tomando esta superficie, en decímetros cuadrados, igual á 25 ó 30 veces la potencia en caballos.

La experiencia ha demostrado que la temperatura del agua que ha efectuado la condensación debe estar comprendida entre 35 y 40°. Una temperatura más alta no permite obtener una contrapresión suficientemente pequeña, y una temperatura más baja exigiría un gasto considerable de agua, aumentando naturalmente el trabajo de la bomba.

## TEORIA DE LOS CONDENSADORES ENFRIADOS POR INYECCION O DE REGADERA.

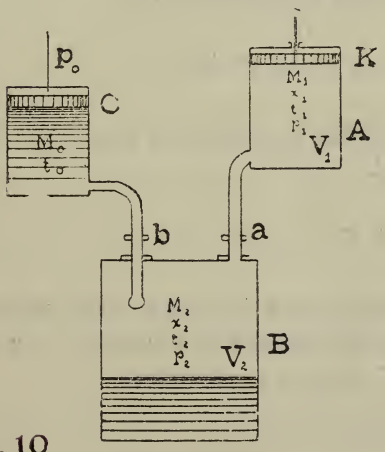



Fig. 10

En la (Fig. 10), A es el cilindro de vapor y B el condensador que recibe agua á la temperatura $t_0$ del recipiente C. En este hay $M_0$ kilos de agua y sobre el émbolo se ejerce la presión $p_0$ igual á la atmosférica.

Supongamos primeramente los tres recipientes separados; es claro que el trabajo interno en cada uno de ellos será,

en A

$$M_1 (A\, U_0 + q_1 + x_1 \rho_1),$$

en B

$$M_2 (A U_0 + q_2 + x_2 \rho_2)$$

y en C

$$M_0 (A U_0 + q_0).$$

Si designamos por U el trabajo interno correspondiente á la masa total $M_0 + M_1 + M_2 = M$, tendremos:

$$A U = M A U_0 + M_0 q_0 + M_1 (q_1 + x_1 \rho_1) + \\ + M_2 (q_2 + x_2 \rho_2). \qquad (129)$$

Al abrirse las llaves $a$ y $b$, las masas $M_1$ y $M_2$ se mezclarán, manteniéndose un instante infinitamente pequeño la presión $p$ de que ya hablamos; mas la llegada del agua del recipiente C hace abatir rápidamente la presión hasta $p_2$ y supondremos que el agua llega en cantidad conveniente para que esta presión se conserve constante. Al terminar el émbolo su carrera las masas $M_1$ y $M_0$ se encuentran en el condensador, y el peso total de vapor y de líquido en este recipiente será

$$M_0 + M_1 + M_2 = M.$$

Si $x'_2$ es la cantidad específica del vapor al final, el trabajo interior de la masa total será

$$A U' = M (A U_0 + q_2 + x'_2 \rho_2). \qquad (130)$$

U' es distinto de U y mayor, pues la masa total ha ganado durante la operación un trabajo exterior que vamos á valuar.

Al descender el émbolo K recorre el volúmen

$$V_1 = M_1 (x_1 u_1 + \sigma)$$

á la presión constante $p_2$, y el trabajo correspondiente, en unidades de calor será

$$A p_2 M_1 (x_1 u_1 + \sigma).$$

El émbolo C ha recorrido el volúmen $M_0 \sigma$ á la presión atmosférica $p_0$ y el trabajo en unidades de calor será

$$A p_0 M_0 \sigma.$$

Estas dos cantidades de calor quitadas en la ecuación (130) en su segundo miembro, harán escribir en el primero U en lugar de U'; teniéndose así

$$A U = M (A U_0 + q_2 + x'_2 \rho_2) - A M_1 p_2 (x_1 u_1 + \sigma) - \\ - A M_0 p_0 \sigma;$$

y según la (129)

$$M A U_0 + M_0 q_0 + M_1 (q_1 + x_1 \rho_1) + M_2 (q_2 + x_2 \rho_2) = \\ = M (A U_0 + q_2 + x'_2 \rho_2) - A M_1 p_2 (x_1 u_1 + \sigma) - A M_0 p_0 \sigma.$$

Reduciendo, tendremos:

$$M_0 q_0 + M_1 (q_1 + x_1 \rho_1) + M_2 (q_2 + x_2 \rho_2) - M_1 (q_2 + x'_2 \rho_2) - \\ - M_2 (q_2 + x'_2 \rho_2) - M_0 (q_2 + x'_2 \rho_2) = \\ = - A M_1 p_2 (x_1 u_1 + \sigma) - A M_0 p_0 \sigma;$$

$$M_1 [q_1 + x_1 \rho_1 - q_2 + A p_2 (x_1 u_1 + \sigma)] + M_2 x_2 \rho_2 - \\ - x'_2 \rho_2 (M_0 + M_1 + M_2) = M_0 (q_2 - q_0 - A p_0 \sigma);$$

de donde

$$M_0 = \frac{M_1 [q_1 - q_2 + x_1 \rho_1 + A p_2 (x_1 u_1 + \sigma)] + (M_2 x_2 - M x'_2) \rho_2}{q_2 - q_0 - A p_0 \sigma}.$$

Para simplificar esta expresión, notemos que el volumen del condensador tiene los valores siguientes:

$$V_2 = M_2 (x_2 u_2 + \sigma)$$

y

$$V_2 = M (x'_2 u_2 + \sigma);$$

y despreciando á $\sigma$ podemos poner

$$M_2 x_2 = M x'_2 ,$$

ecuación que nos demuestra que el peso del vapor es el mismo antes de la condensación que al final de ella, variando solamente la cantidad específica del vapor.

Por medio de esta ecuación y despreciando los términos que contienen á $\sigma$, la anterior queda

$$M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1 (\rho_1 + A p_2 u_1)}{q_2 - q_0} M_1 \qquad (131)$$

Esta ecuación sólo difiere de la (126) correspondiente á los condensadores de superficie, en el denominador, teniéndose siempre $q_2 - q_0 > q'_0 - q_0$, por ser siempre $q_2 > q'_0$; y por lo mismo la cantidad de agua para efectuar la condensación será menor en estos últimos.

La ecuación anterior puede simplificarse haciendo $c = 1$ y despreciando el término $A p_2 u$, que es muy pequeño, teniéndose

$$M_0 = \frac{t_1 - t_2 + x_1 \rho_1}{t_2 - t_0} \qquad (132)$$

Podemos hacer $x_1 = 1$ y aceptar para $t_1$ el valor medio de 95° con lo que

$$M_0 = \frac{595 - t_2}{t_2 - t_0} M_1 . \qquad (133)$$

Apliquemos la fórmula al ejemplo anterior:

$$M_0 = \frac{595 - 46}{46 - 15} M_1 = \frac{549}{31} M_1 = 17.7 M_1$$

kilos de agua, cantidad menor que la encontrada para los condensadores de superficie.

La capacidad del condensador no puede fijarse teóricamente:

cuando son muy grandes condensan bien, pero hacen mal el vacío, por la dificultad de desalojar el aire en el momento de empezar á funcionar; si son demasiado pequeños, la presión del vapor que sale del cilindro no disminuye bastante rápidamente, resultando en los primeros momentos una presión muy alta en el condensador y por lo mismo una contrapresión muy grande. Conviene pues darles dimensiones médias, y su temperatura dependerá de la presión que se consiga obtener.

## ESCURRIMIENTO DE UNA MEZCLA DE VAPOR Y DE LIQUIDO.

26.—Sea un recipiente en el cual existe una mezcla de vapor y de líquido á la temperatura $t_1$ y presión $p_1$, $x_1$ siendo la cantidad específica del vapor; y supongamos que el escurrimiento va á tener lugar á otro recipiente de presión menor $p_2$ que permanecerá constante, la temperatura en el orificio de salida siendo $t_2$ y $x_2$ el título de la mezcla, cantidades correspondientes á la presión $p_2$.

Aceptaremos para estudiar este caso todas las hipótesis que se acostumbre hacer en Hidráulica, pudiendo partir para este estudio de la fórmula (54) que es

$$d\frac{w^2}{2g} = -d(p\,v) - d\,U + \frac{d\,Q}{A}.$$

Integrando tendremos:

$$A\frac{w^2}{2g} = Q - A(U_2 - U_1) + A(p_1 v_1 - p_2 v_2). \qquad (134)$$

Trasformemos esta ecuación por medio de las siguientes ya encontradas

$$A(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + x_2 \rho_2 - x_1 \rho_1$$

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma; \qquad v_2 = x_2 u_2 + \sigma; \qquad r = \rho + A\,p\,u$$

$$A\frac{w^2}{2g} = Q - q_2 + q_1 - x_2\rho_2 + x_1\rho_1 + A(p_1 x_1 u_1 + p_1\sigma - \\ - p_2 x_2 u_2 - p_2\sigma);$$

ó

$$A\frac{w^2}{2g} = Q + x_1 r_1 - x_2 r_2 + q_1 - q_2 + A\sigma(p_1 - p_2). \quad (135)$$

Estudiaremos el escurrimiento en el caso adiabático, para lo cual haremos $Q = 0$, con lo que la anterior queda

$$A\frac{w^2}{2g} = x_1 r_1 - x_2 r_2 + q_1 - q_2 + A\sigma(p_1 - p_2), \quad (136)$$

$x_2$ pudiendo deducirse de la (103), que escrita para este caso es

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = \tau_1 - \tau_2. \quad (137)$$

Las cantidades

$$\frac{r_2}{T_2}, \quad \frac{r_1}{T_1}, \quad \tau_1, \quad \tau_2,$$

se toman de las tablas de Zeuner, teniendo por argumento las presiones inicial y final.

Puede encontrarse una ecuación más cómoda para el cálculo de $w$, eliminando $x_1 r_2$ de la (136) por medio de la (137), teniéndose

$$A\frac{w^2}{2g} = x_1 r_1 - x_1 r_1\frac{T_2}{T_1} - T_2(\tau_1 - \tau_2) + q_1 - q_2 + \\ + A\sigma(p_1 - p_2).$$

ó

$$A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T_2) + (q_1 - q_2) - T_2(\tau_1 - \tau_2) + \\ + A\sigma(p_1 - p_2) \qquad (138)$$

El gasto en volumen será, F siendo la sección

$$F\,w,$$

y en peso

$$G = \frac{F\,w}{v_2} = \frac{F\,w}{x_2 u_2 + \sigma}. \qquad (139)$$

Si designamos por D el peso del vapor y por W el del líquido, tendremos

$$D = x_2 G; \qquad W = (1 - x_2) G \qquad (140)$$

**EJEMPLO.**

Se tiene en una caldera vapor saturado y seco á una presión de 5 atmósferas, que va á dejarse escurrir en la atmósfera por un orificio bien arredondado de sección F, se pide la velocidad de salida, el peso de vapor y el del líquido.

Para 5 atmósferas

$$\frac{r_1}{T_1} = 1.174; \qquad q_1 = 153.7; \qquad \tau_1 = 0.447; \qquad T_1 = 425.2$$

Para 1 atmósfera

$$\frac{r_2}{T_2} = 1.438; \qquad q_2 = \frac{100.5}{53.2} \qquad \tau_2 = \frac{0.314}{0.133} \qquad T_2 = \frac{373.0}{52.21}$$

$$A\frac{w^2}{2g} = 1.174 \times 52.2 + 53.2 - 373 \times 0.133 + \\ + \frac{1}{424}\,0.001\,(5 \times 10334 - 10334);$$

de donde, ejecutando todas las operaciones

$$A \frac{w^2}{2g} = 64.972;$$

y por consiguiente

$$w = 734.^{m}80, \quad \text{aceptando} \quad g = 9.80.$$

La (137) nos da

$$x_2 \times 1.438 - 1.174 = 0.133;$$

de donde

$$x_2 = 0.909; \quad \text{y como} \quad u_2 = 1.649$$

$$v_2 = 0.909 \times 1.649 + 0.001 = 1.5.$$

La (139) da

$$G = \frac{734.8}{1.5} F = 489.9 \ F;$$

y la (140)

$$D = 445.3 \ F \quad \text{kilos de vapor,}$$

$$W = 44.6 \ F \quad \text{kilos de líquido.}$$

Si el orificio es circular como es el caso general

$$F = 0.785 \ d^2;$$

luego

$$G = 489.9 \times 0.785 \ d^2 = 384,57 \ d^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{384.57}} \sqrt{G} = 0.051 \sqrt{G}.$$

Si se expresa á $d$ en centímetros

$$d = 5.1 \sqrt{G}.$$

Como se vé, el escurrimiento trae consigo una condensación del vapor.

## VAPORES SOBRECALENTADOS.

Poco puede decirse sobre este asunto, falto todavía de experiencias concluyentes.

Según Hirn, el trabajo anterior U de un vapor sobrecalentado es proporcional al producto $p\,v$ á partir del punto de condensación hasta el punto en que adquiera las propiedades de los gases permanentes; esto equivale á aceptar que la curva isodinámica sea una hipérbola equilátera de ecuación.

$$p\,v = p_1\,v_1\,.$$

Según Zeuner es más exacta la ecuación

$$p\,v^{\nu} = p_1\,v_1{}^{\nu}.$$

Aceptaremos con Zeuner que $p$, $v$ y T varían según la ecuación

$$p\,v = 50.933\ T - 192\ 50\ p^{\frac{1}{4}} \qquad (141)$$

cuando $p$ esta expresado en kilos por mt. cd., y

$$p\,v = 0.0049287\ T - 0.018628\ p^{\frac{1}{4}} \qquad (142)$$

cuando $p$ está dado en atmósferas.

La energía interna de un kilo de vapor saturado será

$$U' = 476.11 + 0.007059\ p\,v' \qquad (143)$$

$p$ expresando aquí kilos por mt. cd.

# TABLAS

DEL

# VAPOR DE AGUA SATURADO

$p$ = tensión del vapor, en kg. por metro cuadrado.

$t$ = temperatura Celsius.

$q$ = calor de un kg. de agua, en calorías

$\rho$ = calor latente interno de un kg. de vapor saturado.

$Apu$ = calor latente externo de un kg. de vapor saturado,

$r = \rho + Apu$ = calor latente total de un kg. de vapor saturado.

$\lambda = \rho + q + Apu$ = calor total de un kg. de vapor saturado.

$u$ (metros cúbicos) — volumen engendrado por el piston durante la evaporación de un kg. de agua.

$\sigma$ (metros cúbicos)—volumen de un kg. de agua saturada, á $p$ y $t$.

$v = \sigma + u$ = volumen de un kg. de vapor saturado.

$\delta = \frac{1}{v}$ = peso de un metro cúbico de vapor saturado.

$T = t + T_0 = t + 272°,815$ = temperatura absoluta centigr.

$\phi = \int \frac{dq}{T_0 + t}$ = entropia de un kg. de agua.

$\frac{r}{T}$ = entropia de evaporación por kg.

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 62.55 | 0 | 0.0000 | 575 400 | 31.100 | 606 500 | 606 500 |
| 67.17 | 1 | 1.0000 | 574.609 | 31.196 | 605.805 | 606.805 |
| 72 09 | 2 | 2 0001 | 573.818 | 31.292 | 605.110 | 607.110 |
| 77.33 | 3 | 3.0002 | 573.027 | 31.388 | 604 415 | 607.415 |
| 82.90 | 4 | 4 0003 | 572.236 | 31.484 | 603 720 | 607.720 |
| 88 85 | 5 | 5.0005 | 571.445 | 31.580 | 603.025 | 608 025 |
| 95.14 | 6 | 6.0008 | 570 654 | 31.676 | 602.330 | 608.330 |
| 101.86 | 7 | 7.0011 | 569.863 | 31.771 | 601.634 | 608.635 |
| 109.01 | 8 | 8.0014 | 569.072 | 31.868 | 600.940 | 608.940 |
| 116.58 | 9 | 9.0018 | 568 281 | 31.962 | 600.243 | 609.245 |
| 124.62 | 10 | 10.0023 | 567.490 | 32.058 | 599.548 | 609.550 |
| 133.14 | 11 | 11.0028 | 566.699 | 32.153 | 598.852 | 609.855 |
| 142.18 | 12 | 12 0034 | 565 908 | 32.249 | 598.157 | 610.160 |
| 151.77 | 13 | 13.0039 | 565.117 | 32.344 | 597.461 | 610.465 |
| 161.91 | 14 | 14.0047 | 564 326 | 32.439 | 596,765 | 610.770 |
| 172.67 | 15 | 15.0055 | 563.535 | 32.534 | 596.069 | 611.075 |
| 184.05 | 16 | 16.0063 | 562.744 | 32.630 | 595.374 | 611.380 |
| 196.07 | 17 | 17.0073 | 561.953 | 32 725 | 594.678 | 611.685 |
| 208.79 | 18 | 18.0082 | 561.162 | 32.820 | 593.982 | 611.990 |
| 222.26 | 19 | 19.0093 | 560.371 | 32.915 | 593.286 | 612.295 |
| 236.47 | 20 | 20.0104 | 559.580 | 33.010 | 592.590 | 612.600 |
| 251.48 | 21 | 21.0116 | 558.789 | 33.104 | 591.893 | 612.905 |
| 267.30 | 22 | 22 0129 | 557.998 | 33.199 | 591.197 | 613.210 |
| 283.99 | 23 | 23.0142 | 557.207 | 33.294 | 590.501 | 613.515 |
| 301.61 | 24 | 24.0157 | 556.416 | 33.388 | 589.804 | 613.820 |
| 320.19 | 25 | 25.0172 | 555.625 | 33.483 | 589.108 | 614.125 |
| 339.76 | 26 | 26.0188 | 554.834 | 33.577 | 588.411 | 614.430 |
| 360.39 | 27 | 27.0205 | 554.043 | 33.672 | 587.715 | 614.735 |
| 382.06 | 28 | 28.0223 | 553.252 | 33.766 | 587.018 | 615.040 |
| 404.92 | 29 | 29.0241 | 552.461 | 33.860 | 586.321 | 615.345 |
| 428.96 | 30 | 30.0261 | 551.670 | 33.954 | 585.624 | 615.650 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 62 55 | 211.3 | 211.3 | 0.00473 | 2.7230 | 2.2228 | 0.0000 |
| 67.17 | 197.4 | 197.4 | 0.00507 | 2.9111 | 2.2121 | 0.0037 |
| 72.09 | 184.5 | 184.5 | 0.00542 | 3.1105 | 2.2016 | 0.0073 |
| 77.33 | 172.5 | 172.5 | 0.00580 | 3.3218 | 2.1911 | 0.0094 |
| 82.90 | 161.4 | 161.4 | 0.00620 | 3.5453 | 2.1807 | 0.0146 |
| 88.85 | 151.1 | 151.1 | 0.00662 | 3.7830 | 2.1703 | 0.0182 |
| 95.14 | 141.5 | 141.5 | 0.00707 | 4.0329 | 2.1600 | 0.0217 |
| 101.86 | 132.6 | 132.6 | 0.00754 | 4.2989 | 2.1498 | 0.0253 |
| 109.01 | 124.2 | 124.2 | 0.00805 | 4.5802 | 2.1397 | 0.0289 |
| 116.58 | 116.5 | 116.5 | 0.00858 | 4.8771 | 2.1296 | 0.0343 |
| 124.62 | 109.3 | 109.3 | 0.00915 | 5.1906 | 2.1197 | 0.0360 |
| 133.14 | 102.6 | 102.6 | 0.00974 | 5.5214 | 2.1097 | 0.0395 |
| 142.18 | 96.40 | 96.40 | 0.01037 | 5.8706 | 2.0999 | 0.0431 |
| 151.77 | 90.57 | 90.57 | 0.01104 | 6.2394 | 2.0901 | 0.0466 |
| 161.91 | 85.15 | 85,15 | 0.01174 | 6.6274 | 2.0804 | 0.0501 |
| 172.67 | 80.08 | 80.08 | 0.01249 | 7.0374 | 2.0708 | 0.0535 |
| 184.05 | 75.35 | 75.35 | 0.01327 | 7.4686 | 2.0612 | 0.0570 |
| 196.07 | 70.94 | 70.94 | 0.01410 | 7.9221 | 2.0517 | 0.0605 |
| 208.79 | 66.81 | 66.81 | 0.01497 | 8.3999 | 2.0422 | 0.0639 |
| 222.26 | 62.94 | 62.94 | 0.01589 | 8.9034 | 2.0328 | 0.0674 |
| 236.47 | 59.33 | 59.33 | 0.01686 | 9.4320 | 2.0235 | 0.0708 |
| 251.48 | 55.95 | 55.95 | 0.01787 | 9.9880 | 2.0143 | 0.0742 |
| 267.30 | 52.79 | 52.79 | 0.01894 | 10.571 | 2.0051 | 0.0776 |
| 283.99 | 49.83 | 49.83 | 0.02007 | 11.183 | 1.9959 | 0.0810 |
| 301.61 | 47.05 | 47.05 | 0.02125 | 11.827 | 1.9869 | 0.0844 |
| 320.19 | 44.44 | 44.44 | 0.02250 | 12.502 | 1.9778 | 0 0878 |
| 339.76 | 42.00 | 42.00 | 0.02381 | 13.210 | 1.9689 | 0.0921 |
| 360.39 | 39.71 | 39.71 | 0.02518 | 13.953 | 1.9600 | 0.0944 |
| 382.06 | 37.56 | 37.56 | 0.02662 | 14.729 | 1.9512 | 0 0978 |
| 404.92 | 35.34 | 35.34 | 0.02814 | 15.549 | 1.9424 | 0.1011 |
| 428 96 | 33.64 | 33.64 | 0.02972 | 16.399 | 1.9337 | 0.1044 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 428 96 | 30 | 30.0261 | 551.670 | 33.954 | 585.624 | 615.650 |
| 454.22 | 31 | 31.0282 | 550.879 | 34.048 | 584.927 | 615.955 |
| 480.74 | 32 | 32.0303 | 550.088 | 34.142 | 584.230 | 616 260 |
| 508.64 | 33 | 33.0326 | 549.297 | 34 235 | 583.532 | 616.565 |
| 537.97 | 34 | 34.0349 | 548.506 | 34.329 | 582.835 | 616 870 |
| 568.68 | 35 | 35 0374 | 547.715 | 34.423 | 582.138 | 617.175 |
| 600.96 | 36 | 36.0399 | 546.924 | 34.516 | 581.440 | 617.480 |
| 634.81 | 37 | 37.0426 | 546.133 | 34.609 | 580.742 | 617.785 |
| 670.31 | 38 | 38.0453 | 545.342 | 34.703 | 580.045 | 618.090 |
| 707.52 | 39 | 39.0482 | 544.551 | 34.796 | 579.347 | 618.395 |
| 746.50 | 40 | 40.0512 | 543.760 | 34 889 | 578.649 | 618.700 |
| 787.34 | 41 | 41.0543 | 542.969 | 34.982 | 577.951 | 619.005 |
| 830.10 | 42 | 42.0576 | 542.178 | 35.074 | 577.252 | 619.310 |
| 874.85 | 43 | 43.0607 | 541 387 | 35.167 | 576.554 | 619.615 |
| 921.67 | 44 | 44.0643 | 540.596 | 35.260 | 575.856 | 619.920 |
| 970.63 | 45 | 45.0678 | 539.805 | 35 352 | 575.157 | 620.225 |
| 1021.8 | 46 | 46.0715 | 539.014 | 35.444 | 574.458 | 620.530 |
| 1075.3 | 47 | 47.0752 | 538.223 | 35 537 | 573.760 | 620.835 |
| 1130.1 | 48 | 48.0793 | 537 432 | 35.629 | 573.061 | 621.140 |
| 1189.6 | 49 | 49.0833 | 436.641 | 35 721 | 572.362 | 621.445 |
| 1250 6 | 50 | 50.0875 | 535.850 | 35.812 | 571.662 | 621.750 |
| 1314.2 | 51 | 51.0918 | 535.059 | 35 904 | 570.963 | 622.055 |
| 1380 6 | 52 | 52.0962 | 534.268 | 35 996 | 570.264 | 622.360 |
| 1449.8 | 53 | 53.1008 | 533.477 | 36.087 | 569.564 | 622.665 |
| 1522.0 | 54 | 54.1056 | 532.686 | 36.178 | 568.864 | 622.970 |
| 1597.2 | 55 | 55.1104 | 531.895 | 36.270 | 568.165 | 623.275 |
| 1675.6 | 56 | 56.1154 | 531.104 | 36 361 | 567.465 | 623 580 |
| 1757.3 | 57 | 57.1205 | 530.313 | 36 451 | 566.764 | 623 885 |
| 1842.3 | 58 | 58.1258 | 529.522 | 36.542 | 566 064 | 624.190 |
| 1930.8 | 59 | 59.1312 | 528.731 | 36.633 | 565.364 | 624.497 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 428.96 | 33.64 | 33.64 | 0.02972 | 16.399 | 1.9337 | 0.1044 |
| 454.22 | 31.86 | 31.86 | 0.03139 | 17.292 | 1.9250 | 0.1077 |
| 480.74 | 30.18 | 30.18 | 0.03313 | 18.225 | 1.9164 | 0.1109 |
| 508.64 | 28.61 | 28.61 | 0.03496 | 19.203 | 1.9079 | 0.1143 |
| 537.97 | 27.12 | 27.12 | 0.03687 | 20.225 | 1.8994 | 0.1176 |
| 568.68 | 25.73 | 25.73 | 0.03887 | 21.290 | 1.8910 | 0.1209 |
| 600.96 | 24.41 | 24.41 | 0.04097 | 22.406 | 1.8826 | 0.1241 |
| 634.81 | 23.17 | 23.17 | 0.04316 | 23.571 | 1.8743 | 0.1272 |
| 670.31 | 22.00 | 22.00 | 0.04545 | 24.785 | 1.8660 | 0.1305 |
| 707.52 | 20.90 | 20.90 | 0.04784 | 26.053 | 1.8578 | 0.1338 |
| 746.50 | 19.86 | 19.86 | 0.05034 | 27.375 | 1.8496 | 0.1371 |
| 787.34 | 18.88 | 18.88 | 0.05295 | 28.754 | 1.8415 | 0.1402 |
| 830.10 | 17.96 | 17.96 | 0.05569 | 30.193 | 1.8334 | 0.1434 |
| 874.85 | 17.08 | 17.08 | 0.05853 | 31.690 | 1.8254 | 0.1470 |
| 921.67 | 16.26 | 16.26 | 0.06150 | 33.249 | 1.8174 | 0.1497 |
| 970.63 | 15.48 | 15.48 | 0.06460 | 34.873 | 1.8095 | 0.1529 |
| 1021.8 | 14.74 | 14.74 | 0.06783 | 36.563 | 1.8017 | 0.1560 |
| 1075.3 | 14.05 | 14.05 | 0.07119 | 38.319 | 1.7938 | 0.1592 |
| 1130.1 | 13.40 | 13.40 | 0.07463 | 40.110 | 1.7861 | 0.1623 |
| 1189.6 | 12.76 | 12.76 | 0.07835 | 42.050 | 1.7783 | 0.1655 |
| 1250.6 | 12.170 | 12.171 | 0.08216 | 44.030 | 1.7707 | 0.1686 |
| 1314.2 | 11.611 | 11.612 | 0.08612 | 46.082 | 1.7630 | 0.1717 |
| 1380.6 | 11.081 | 11.082 | 0.09024 | 48.215 | 1.7555 | 0.1747 |
| 1449 8 | 10.579 | 10.580 | 0.09452 | 50.428 | 1.7479 | 0.1778 |
| 1522.0 | 10.102 | 10.103 | 0.09898 | 52.730 | 1.7404 | 0.1809 |
| 1597.2 | 9.651 | 9.652 | 0.10360 | 55.112 | 1.7330 | 0.1842 |
| 1675.6 | 9.223 | 9.224 | 0.10842 | 57.587 | 1.7256 | 0.1871 |
| 1757.3 | 8.816 | 8.817 | 0.11342 | 60.156 | 1.7182 | 0.1901 |
| 1842.3 | 8.430 | 8.431 | 0.11861 | 62.815 | 1.7110 | 0.1931 |
| 1930.8 | 8.064 | 8.065 | 0.12400 | 65.571 | 1.7037 | 0.1962 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 100 | 6.723 | 6.724 | 570.082 | 31.745 | 601.827 | 608.551 |
| 200 | 17.309 | 17.317 | 561.709 | 32.753 | 594.462 | 611.779 |
| 300 | 23.908 | 23.925 | 556.488 | 33.379 | 589.867 | 613 792 |
| 400 | 28.785 | 28.809 | 552.631 | 33.839 | 586.470 | 615.279 |
| 500 | 32.690 | 32.722 | 549.542 | 34.206 | 583.748 | 616.470 |
| 600 | 35.970 | 36.010 | 546.948 | 34.513 | 581.461 | 617.471 |
| 700 | 38.798 | 38.846 | 544.711 | 34.776 | 579.487 | 618.333 |
| 800 | 41.296 | 41.351 | 542.735 | 35.009 | 577.744 | 619.095 |
| 900 | 43.537 | 43.600 | 540.962 | 35.217 | 576.179 | 619.779 |
| 1000 | 45.573 | 45.643 | 539.352 | 35.405 | 574.757 | 620.400 |
| 1100 | 47.441 | 47.518 | 537.874 | 35.577 | 573.452 | 620.970 |
| 1200 | 49.172 | 49.256 | 536.505 | 35.736 | 572.241 | 621.497 |
| 1300 | 50.782 | 50.872 | 535.231 | 35.884 | 571.117 | 621.989 |
| 1400 | 52.288 | 52.385 | 534.040 | 36.022 | 570.063 | 622.448 |
| 1500 | 53.705 | 53.809 | 532.919 | 36.152 | 569.071 | 622.880 |
| 1600 | 55.035 | 55.145 | 531.867 | 36.274 | 568.141 | 623.286 |
| 1700 | 56.298 | 56.414 | 530.868 | 36.389 | 567.257 | 623.671 |
| 1800 | 57.502 | 57.624 | 529.916 | 36.498 | 566.414 | 624.038 |
| 1900 | 58.652 | 58.780 | 529.006 | 36.603 | 565.609 | 624.389 |
| 2000 | 59.751 | 59.885 | 528.137 | 36.702 | 564.839 | 624.724 |
| 2100 | 60.804 | 60.944 | 527.304 | 36.797 | 564.101 | 625.045 |
| 2200 | 61.815 | 61.961 | 526.504 | 36.889 | 563.393 | 625.354 |
| 2300 | 62.787 | 62.939 | 525.735 | 36.976 | 562.711 | 625.650 |
| 2400 | 63.723 | 63.881 | 524.995 | 37.060 | 562.055 | 625.936 |
| 2500 | 64.627 | 64.891 | 524.280 | 37.140 | 561.420 | 626.211 |
| 2600 | 65.501 | 65.671 | 523.589 | 37.218 | 560.807 | 626.478 |
| 2700 | 66.348 | 66.523 | 522.919 | 37.294 | 560.213 | 626.736 |
| 2800 | 67.169 | 67.350 | 522.269 | 37.368 | 559.637 | 626.987 |
| 2900 | 67.966 | 68.151 | 521.639 | 37.440 | 559.079 | 627.230 |
| 3000 | 68.738 | 68.930 | 521.028 | 37.507 | 558.535 | 627.465 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 100 | 134.92 | 134.92 | 0.0074 | 4.2254 | 2.1531 | 0.0234 |
| 200 | 69.600 | 69.601 | 0 0143 | 8.0710 | 2.0453 | 0.0614 |
| 300 | 47 293 | 47.294 | 0.0211 | 11.767 | 1.9877 | 0.0841 |
| 400 | 35.954 | 35.955 | 0.0278 | 15.370 | 1.9441 | 0.1004 |
| 500 | 29.075 | 29.076 | 0.0344 | 18.900 | 1.9102 | 0.1133 |
| 600 | 24.447 | 24.448 | 0 0409 | 23.373 | 1.8828 | 0.1240 |
| 700 | 21.114 | 21.115 | 0.0474 | 25.797 | 1.8594 | 0.1332 |
| 800 | 18.599 | 18.600 | 0.0538 | 29.181 | 1.8391 | 0.1411 |
| 900 | 16.630 | 16.631 | 0.0601 | 32.529 | 1.8211 | 0.1483 |
| 1000 | 15.047 | 15.048 | 0.0664 | 35 844 | 1.8050 | 0.1547 |
| 1100 | 13.746 | 13.747 | 0.0727 | 39.129 | 1.7904 | 0.1606 |
| 1200 | 12.657 | 12.658 | 0.0790 | 42.388 | 1.7770 | 0.1660 |
| 1300 | 11.731 | 11.732 | 0.0852 | 45.625 | 1.7647 | 0,1710 |
| 1400 | 10.935 | 10.936 | 0.0914 | 48.838 | 1.7533 | 0.1756 |
| 1500 | 10.243 | 10.244 | 0.0976 | 52 023 | 1.7426 | 0.1800 |
| 1600 | 9.6353 | 9.6363 | 0.1038 | 53.200 | 1.7326 | 0.1841 |
| 1700 | 9.0973 | 9.0983 | 0.1099 | 58.354 | 1.7232 | 0.1880 |
| 1800 | 8.6176 | 8.6186 | 0.1160 | 61.492 | 1.7144 | 0.1916 |
| 1900 | 8.1875 | 8.1885 | 0.1221 | 64.611 | 1.7060 | 0,1951 |
| 2000 | 7.7992 | 7.8002 | 0.1282 | 67.716 | 1.6981 | 0.1985 |
| 2100 | 7.4470 | 7.4480 | 0.1343 | 70.808 | 1,6906 | 0,2016 |
| 2200 | 7.1263 | 7.1273 | 0.1403 | 73.882 | 1.6834 | 0.2048 |
| 2300 | 6.8325 | 6.8335 | 0.1463 | 76.946 | 1,6765 | 0.2076 |
| 2400 | 6.5627 | 6.5637 | 0.1524 | 79.997 | 1.6669 | 0.2104 |
| 2500 | 6.3138 | 6.3148 | 0.1584 | 83.037 | 1,6636 | 0.2131 |
| 2600 | 6.0837 | 6.0847 | 0.1643 | 86.064 | 1.6575 | 0.2157 |
| 2700 | 5 8704 | 5.8714 | 0.1703 | 89.077 | 1.6515 | 0.2182 |
| 2800 | 5.6719 | 5.6729 | 0.1763 | 92.080 | 1.6457 | 0.2207 |
| 2900 | 5.4869 | 5.4879 | 0.1822 | 95.070 | 1.6403 | 0.2230 |
| 3000 | 5.3135 | 5.3145 | 0.1882 | 98.057 | 1.6351 | 0.2253 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | 68.737 | 68.930 | 521.028 | 37.507 | 558.535 | 627.465 |
| 3100 | 69.488 | 69.686 | 520.435 | 37.573 | 558.008 | 627.694 |
| 3200 | 70.219 | 70.422 | 519.857 | 37.638 | 557.495 | 627.917 |
| 3300 | 70.932 | 71.139 | 519.293 | 37.702 | 556.995 | 628.134 |
| 3400 | 71.626 | 71.838 | 518.744 | 37.764 | 556.508 | 628.346 |
| 3500 | 72.303 | 72.520 | 518.208 | 37.824 | 556.032 | 628.552 |
| 3600 | 72.963 | 73.185 | 517.686 | 37.883 | 555.569 | 628.754 |
| 3700 | 73.608 | 73.835 | 517.176 | 37.939 | 555.115 | 628.950 |
| 3800 | 74.239 | 74.472 | 516.677 | 37.994 | 554.671 | 629.143 |
| 3900 | 74.857 | 75.095 | 516.188 | 38.048 | 554.236 | 629.331 |
| 4000 | 75.461 | 75.704 | 515.710 | 38.102 | 553.812 | 629.516 |
| 4100 | 76.053 | 76.301 | 515.242 | 38.153 | 553.395 | 529.696 |
| 4200 | 76.633 | 76.886 | 514.783 | 38.204 | 552.987 | 629.873 |
| 4300 | 77.202 | 77.459 | 514.333 | 38.255 | 552.588 | 630.047 |
| 4400 | 77.760 | 78.022 | 513.892 | 38.303 | 552.195 | 630.217 |
| 4500 | 78.307 | 78.574 | 513.459 | 38.351 | 551.810 | 630.384 |
| 4600 | 78.843 | 79.115 | 513.035 | 38.397 | 551.432 | 630.547 |
| 4700 | 79.368 | 79.644 | 512.620 | 38.443 | 551.063 | 630.707 |
| 4800 | 79.884 | 80.165 | 512.212 | 38.488 | 550.700 | 630.865 |
| 4900 | 80.392 | 80.677 | 511.810 | 38.533 | 550.343 | 631.020 |
| 5000 | 80.892 | 81.182 | 511.414 | 38.576 | 549.990 | 631.172 |
| 5100 | 81.384 | 81.678 | 511.025 | 38.619 | 549 644 | 631.322 |
| 5200 | 81.868 | 82.167 | 510.642 | 38.661 | 549.303 | 631.470 |
| 5300 | 82.344 | 82.647 | 510.266 | 38.702 | 548.968 | 631.615 |
| 5400 | 82.813 | 83.120 | 509.895 | 38.743 | 548.638 | 631.758 |
| 5500 | 83.275 | 83.587 | 509.529 | 38.783 | 548.312 | 631.899 |
| 5600 | 83.730 | 84.046 | 509.170 | 38.822 | 547.992 | 632.038 |
| 5700 | 84.178 | 84.498 | 508.815 | 38.861 | 547.676 | 632.174 |
| 5800 | 84.619 | 84.944 | 508.466 | 38.899 | 547.365 | 632.309 |
| 5900 | 85.054 | 85.383 | 508.122 | 38.936 | 547.058 | 632.441 |
| 6000 | 85.482 | 85.815 | 507.784 | 38.973 | 546.757 | 632.572 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | 5.3135 | 5.3145 | 0.1882 | 98.057 | 1.6351 | 0.2253 |
| 3100 | 5.1511 | 5.1521 | 0.1941 | 101.03 | 1.6300 | 0.2275 |
| 3200 | 4.9988 | 4.9998 | 0.2000 | 104.00 | 1.6250 | 0.2296 |
| 3300 | 4.8556 | 4.8566 | 0.2058 | 106.95 | 1.6202 | 0.2317 |
| 3400 | 4.7205 | 4.7215 | 0.2118 | 109.89 | 1.6155 | 0.2338 |
| 3500 | 4.5929 | 4.5939 | 0.2177 | 112.83 | 1.6110 | 0.2357 |
| 3600 | 4.4723 | 4 4733 | 0.2235 | 115.75 | 1.6066 | 0.2377 |
| 3700 | 4.3579 | 4.3589 | 0.2294 | 118.68 | 1.6023 | 0.2395 |
| 3800 | 4.2493 | 4.2503 | 0.2353 | 121.59 | 1.5081 | 0.2414 |
| 3900 | 4.1463 | 4.1473 | 0.2411 | 124.49 | 1.5940 | 0.2432 |
| 4000 | 4.0483 | 4.0493 | 0.2470 | 127.39 | 1.5900 | 0.2449 |
| 4100 | 3.9549 | 3.9559 | 0.2528 | 130.28 | 1.5861 | 0.2466 |
| 4200 | 3.8659 | 3.8669 | 0.2586 | 133.16 | 1.5823 | 0.2483 |
| 4300 | 3.7810 | 3.7820 | 0.2644 | 136.03 | 1.5786 | 0.2499 |
| 4400 | 3.6997 | 3.7007 | 0.2702 | 138.90 | 1.5750 | 0.2516 |
| 4500 | 3.6220 | 3.6230 | 0.2760 | 141.76 | 1.5714 | 0.2531 |
| 4600 | 3.5475 | 3.5485 | 0.2818 | 144.62 | 1.5679 | 0.2547 |
| 4700 | 3.4762 | 3.4772 | 0.2876 | 147.47 | 1.5645 | 0.2562 |
| 4800 | 3.4078 | 3.4088 | 0.2933 | 150.31 | 1.5612 | 0.2577 |
| 4900 | 3.3421 | 3.3431 | 0.2991 | 153.14 | 1.5580 | 0.2591 |
| 5000 | 3.2790 | 3.2800 | 0.3049 | 155.97 | 1.5548 | 0.2605 |
| 5100 | 3.2183 | 3.2193 | 0.3106 | 158.79 | 1.5516 | 0.2619 |
| 5200 | 3.1598 | 3.1608 | 0.3164 | 161.61 | 1.5485 | 0.2633 |
| 5300 | 3.1035 | 3.1045 | 0.3221 | 164.42 | 1.5455 | 0.2647 |
| 5400 | 3.0492 | 3.0502 | 0.3278 | 167.22 | 1.5426 | 0.2660 |
| 5500 | 2.9969 | 2.9979 | 0.3336 | 170.02 | 1.5397 | 0.2673 |
| 5600 | 2 9463 | 2 9473 | 0.3393 | 172.82 | 1.5368 | 0.2686 |
| 5700 | 2.8975 | 2.8985 | 0.3450 | 175.61 | 1.5340 | 0.2699 |
| 5800 | 2.8504 | 2.8514 | 0.3507 | 178.38 | 1.5312 | 0.2711 |
| 5900 | 2.8047 | 2.8057 | 0.3564 | 181.17 | 1.5285 | 0.2723 |
| 6000 | 2.7606 | 2.7616 | 0.3621 | 183.94 | 1.5258 | 0.2735 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu.$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6000 | 85.482 | 85.815 | 507.784 | 38.973 | 546.757 | 632.572 |
| 6100 | 85.904 | 86.241 | 507.450 | 39.010 | 546.460 | 632.701 |
| 6200 | 86.320 | 86.661 | 507.121 | 39.046 | 546.167 | 632.828 |
| 6300 | 86.731 | 87.076 | 506.796 | 39.081 | 545.877 | 632.953 |
| 6400 | 87.136 | 87.486 | 506.475 | 39.115 | 545.590 | 633.076 |
| 6500 | 87.535 | 87.889 | 506.160 | 39.149 | 545.309 | 633.198 |
| 6600 | 87.929 | 88.287 | 505.848 | 39.183 | 545.031 | 633.318 |
| 6700 | 88.318 | 88.680 | 505.540 | 39.217 | 544.757 | 633,437 |
| 6800 | 88.702 | 89,067 | 505.237 | 39.250 | 544.487 | 633.554 |
| 6900 | 89.082 | 89.452 | 504.936 | 39.282 | 544.218 | 633.670 |
| 7000 | 89.458 | 89.832 | 504.639 | 39.314 | 543.953 | 633.785 |
| 7100 | 89.830 | 90.208 | 504.344 | 39.346 | 543.690 | 633.898 |
| 7200 | 90.198 | 90 580 | 504.053 | 39.377 | 543.430 | 634.010 |
| 7300 | 90.562 | 90.948 | 503.765 | 39.408 | 543.173 | 634.121 |
| 7400 | 90.922 | 91.311 | 503.481 | 39.439 | 542.920 | 634.231 |
| 7500 | 91.278 | 91.672 | 503.199 | 39.469 | 542.668 | 634.340 |
| 7600 | 91.630 | 92.028 | 502.921 | 39.498 | 542.419 | 634.447 |
| 7700 | 91.979 | 92.382 | 502.645 | 39.527 | 542.172 | 634 554 |
| 7800 | 92.324 | 92 730 | 502 372 | 39.557 | 541.929 | 634.659 |
| 7900 | 92.665 | 93.075 | 502.102 | 39.586 | 541.688 | 634.763 |
| 8000 | 93.002 | 93.416 | 501.835 | 39.615 | 541.450 | 634.866 |
| 8100 | 93 335 | 93.753 | 501 572 | 39 643 | 541.214 | 634.967 |
| 8200 | 93.664 | 94.085 | 501.312 | 39.671 | 540.983 | 635.068 |
| 8300 | 93.989 | 94.414 | 501.055 | 39.698 | 540.753 | 635.167 |
| 8400 | 94.312 | 94.741 | 500 799 | 39.725 | 540.524 | 635.265 |
| 8500 | 94.632 | 95.065 | 500 546 | 39.752 | 540.298 | 635.363 |
| 8600 | 94.947 | 95.384 | 500 297 | 39.778 | 540.075 | 635.459 |
| 8700 | 95.258 | 95.699 | 500 051 | 39.804 | 539.855 | 635.554 |
| 8800 | 95.567 | 96.011 | 499.807 | 39.830 | 539.637 | 635.648 |
| 8900 | 95.873 | 96 321 | 499.564 | 39.956 | 539.420 | 635.741 |
| 9000 | 96.176 | 96.628 | 499.325 | 39.881 | 539.206 | 635,834 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{t}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6000 | 2.7606 | 2.7616 | 0.3621 | 183.94 | 1.5258 | 0.2735 |
| 6100 | 2.7179 | 2.7189 | 0.3678 | 186.71 | 1.5232 | 0.2747 |
| 6200 | 2.6765 | 2.6775 | 0.3735 | 189.47 | 1.5206 | 0 2759 |
| 6300 | 2.6364 | 2.6374 | 0.3792 | 192.23 | 1.5180 | 0.2771 |
| 6400 | 2.5975 | 2.5985 | 0.3848 | 194.49 | 1.5155 | 0.2782 |
| 6500 | 2.5597 | 2.5607 | 0.3905 | 197.74 | 1.5131 | 0.2793 |
| 6600 | 2.5231 | 2.5241 | 0.3962 | 200.49 | 1.5107 | 0.2804 |
| 6700 | 2.4876 | 2.4886 | 0.4018 | 203.22 | 1.5083 | 0.2815 |
| 6800 | 2.4531 | 2.4541 | 0.4075 | 205.96 | 1.5059 | 0.2826 |
| 6900 | 2.4195 | 2.4205 | 0.4131 | 208.69 | 1.5036 | 0.2836 |
| 7000 | 2.3869 | 2.3879 | 0.4188 | 211.42 | 1.5013 | 0.2847 |
| 7100 | 2.3552 | 2.3562 | 0.4244 | 214.14 | 1.4990 | 0.2857 |
| 7200 | 2.3243 | 2.3253 | 0.4301 | 216.86 | 1.4967 | 0.2867 |
| 7300 | 2.2943 | 2.2953 | 0.4357 | 219.57 | 1.4945 | 0.2878 |
| 7400 | 2.2651 | 2.2661 | 0.4413 | 222.28 | 1.4925 | 0.2888 |
| 7500 | 2.2366 | 2.2376 | 0.4469 | 224.98 | 1.4904 | 0.2898 |
| 7600 | 2.2088 | 2.2098 | 0.4525 | 227.69 | 1.4882 | 0.2907 |
| 7700 | 2.1817 | 2.1827 | 0.4581 | 230.39 | 1.4861 | 0.2917 |
| 7800 | 2.1553 | 2.1563 | 0.4638 | 233.09 | 1.4840 | 0.2927 |
| 7900 | 2.1296 | 2.1306 | 0.4694 | 235.77 | 1.4820 | 0 2936 |
| 8009 | 2.1045 | 2.10554 | 0.4749 | 238.46 | 1.4800 | 0.2945 |
| 8100 | 2.0800 | 2.08104 | 0.4805 | 241.13 | 1.4780 | 0.2955 |
| 8200 | 2.0561 | 2.05714 | 0.4861 | 243.81 | 1.4760 | 0.2964 |
| 8300 | 2.0327 | 2.03374 | 0.4917 | 246.48 | 1.4740 | 0.2973 |
| 8400 | 2.0099 | 2.01094 | 0.4973 | 249.16 | 1.4721 | 0.2982 |
| 8500 | 1.9876 | 1.98864 | 0.5029 | 251.83 | 1.4702 | 0.2990 |
| 8600 | 1.9658 | 1.96684 | 0.5084 | 254.49 | 1.4683 | 0.2999 |
| 8700 | 1.9444 | 1.94544 | 0.5140 | 257.15 | 1.4665 | 0.3008 |
| 8800 | 1.9236 | 1.92464 | 0.5196 | 259.81 | 1.4647 | 0.3016 |
| 8900 | 1.9032 | 1.90424 | 0.5251 | 262.47 | 1.4629 | 0.3024 |
| 9000 | 1.8833 | 1.8843 | 0.5307 | 265.13 | 1.4611 | 0.3033 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9000 | 96.176 | 96.628 | 499.325 | 39.881 | 539.206 | 635.834 |
| 9100 | 96.476 | 96.932 | 499.087 | 39.906 | 538 993 | 635.925 |
| 9200 | 96.774 | 97.233 | 498 852 | 39.931 | 538.783 | 636.016 |
| 9300 | 97.069 | 97.532 | 498.618 | 39.956 | 538 574 | 636.106 |
| 9400 | 97.362 | 97.828 | 498 387 | 39.980 | 538.367 | 636.195 |
| 9500 | 97.653 | 98.123 | 498.156 | 40.005 | 538.161 | 636.284 |
| 9600 | 97.942 | 98.415 | 497.928 | 40.029 | 537.957 | 636.372 |
| 9700 | 98.229 | 98.706 | 497.701 | 40.053 | 537.754 | 636.460 |
| 9800 | 98.514 | 98.995 | 497.475 | 40.077 | 537.552 | 636 547 |
| 9900 | 98.797 | 99.270 | 497.252 | 40.101 | 537.363 | 636.633 |
| 10000 | 99.078 | 99.566 | 497 029 | 40.124 | 537.153 | 636.719 |
| 10333 | 100.000 | 100.500 | 496.300 | 40 200 | 536 500 | 637 000 |
| 11000 | 101.756 | 102.277 | 494.911 | 40 348 | 535.259 | 637.536 |
| 12000 | 104.232 | 104.786 | 492.952 | 40.553 | 533.505 | 638.291 |
| 13000 | 106 544 | 107.131 | 491.124 | 40.741 | 531.865 | 638 996 |
| 14000 | 108 712 | 109 332 | 489.409 | 40 916 | 630 325 | 639 657 |
| 15000 | 110 760 | 111.413 | 487 789 | 41.080 | 528 869 | 640.282 |
| 16000 | 112 698 | 113 380 | 486.256 | 41.237 | 527.493 | 640.873 |
| 17000 | 114.537 | 115.248 | 483 801 | 41 385 | 526.186 | 641.434 |
| 18000 | 116.288 | 117 029 | 483.416 | 41.523 | 524.939 | 641 968 |
| 19000 | 117 959 | 118.729 | 482.094 | 41.654 | 523.748 | 642,477 |
| 20000 | 119.560 | 120 359 | 480.828 | 41.779 | 522.607 | 642.966 |
| 21000 | 121 102 | 121.928 | 479 608 | 41.900 | 521.508 | 643.436 |
| 22000 | 122.587 | 123.439 | 478.424 | 42.016 | 520 450 | 643.889 |
| 23000 | 124 017 | 124.896 | 477 303 | 42.126 | 519.429 | 644.325 |
| 24000 | 125 394 | 126.299 | 476.213 | 42.233 | 518.446 | 644.745 |
| 25000 | 126.723 | 127.655 | 475.162 | 42.334 | 517.496 | 645.151 |
| 26000 | 128.009 | 128.965 | 474.145 | 42.433 | 516.578 | 645 543 |
| 27000 | 129.257 | 130 238 | 473.158 | 42.528 | 515.685 | 645.923 |
| 28000 | 130.470 | 131.475 | 472.198 | 42.620 | 514.818 | 646.293 |
| 29000 | 131.650 | 132.680 | 471.265 | 42.708 | 513 973 | 646 653 |
| 30000 | 132.798 | 133.852 | 470.357 | 42.794 | 513.151 | 647.003 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9000 | 1.8833 | 1.88434 | 0.5307 | 265.13 | 1.4611 | 0.3033 |
| 9100 | 1.8637 | 1.86474 | 0.5363 | 267.78 | 1.4595 | 0.3041 |
| 9200 | 1.8446 | 1.84564 | 0.5418 | 270.42 | 1.4577 | 0.3049 |
| 9300 | 1.8259 | 1.82694 | 0.5474 | 273.06 | 1.4560 | 0.3057 |
| 9400 | 1.8076 | 1.80864 | 0.5529 | 275.70 | 1.4543 | 0.3065 |
| 9500 | 1.7897 | 1.79074 | 0.5584 | 278.35 | 1.4526 | 0.3073 |
| 9600 | 1.7721 | 1.77314 | 0.5640 | 280.97 | 1.4509 | 0.3081 |
| 9700 | 1.7549 | 1.75594 | 0.5695 | 283.59 | 1.4492 | 0.3089 |
| 9800 | 1.7380 | 1.73904 | 0.5750 | 286.22 | 1.4475 | 0.3097 |
| 9900 | 1.7215 | 1.72254 | 0.5805 | 288.84 | 1.4459 | 0.3104 |
| 10000 | 1.7053 | 1.70634 | 0.5860 | 291.46 | 1.4441 | 0.3112 |
| 10333 | 1.6634 | 1.66454 | 0.6008 | 300.13 | 1.4390 | 0.3136 |
| 11000 | 1.5589 | 1.55994 | 0.6410 | 317.48 | 1.4289 | 0.3185 |
| 12000 | 1.4363 | 1.43734 | 0.6957 | 343.21 | 1.4148 | 0.3252 |
| 13000 | 1.3319 | 1.33294 | 0.7502 | 368.74 | 1.4019 | 0.3313 |
| 14000 | 1.2421 | 1.24315 | 0.8044 | 394.02 | 1.3899 | 0.3371 |
| 15000 | 1.1639 | 1.16495 | 0.8584 | 419.10 | 1 3787 | 0.3426 |
| 16000 | 1.0954 | 1.09645 | 0.9120 | 443 91 | 1.3682 | 0.3477 |
| 17000 | 1.0346 | 1.03565 | 0.9656 | 468 59 | 1.3583 | 0.3525 |
| 18000 | 0.98040 | 0.98145 | 1.0189 | 492.55 | 1 3490 | 0.3571 |
| 19000 | 0.93173 | 0.93278 | 1.0721 | 517.42 | 1.3402 | 0.3615 |
| 20000 | 0.88780 | 0.88886 | 1.1250 | 540.95 | 1.3318 | 0.3656 |
| 21000 | 0 84798 | 0.84904 | 1.1778 | 565.59 | 1.3238 | 0 3696 |
| 22000 | 0.81167 | 0.81273 | 1.2304 | 589 44 | 1.3161 | 0 3735 |
| 23000 | 0.77842 | 0.77948 | 1.2829 | 613.17 | 1.3088 | 0.3771 |
| 24000 | 0 74788 | 0.74894 | 1.3352 | 636.75 | 1.3018 | 0 3807 |
| 25000 | 0.71968 | 0 72074 | 1.3875 | 660.24 | 1.2951 | 0 3840 |
| 26000 | 0.69362 | 0.69468 | 1.4395 | 683.58 | 1.2887 | 0 3873 |
| 27000 | 0.66942 | 0 67048 | 1.4915 | 706 82 | 1.2825 | 0 3905 |
| 28000 | 0.64691 | 0.64798 | 1.5433 | 729.93 | 1.2765 | 0.3936 |
| 29000 | 0.62589 | 0.62696 | 1.5950 | 752.95 | 1.2707 | 0.3965 |
| 30000 | 0.60625 | 0.60732 | 1.6466 | 775.85 | 1.2651 | 0.3994 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30000 | 132.798 | 133.852 | 470.357 | 42.794 | 513.151 | 647.003 |
| 31000 | 133.915 | 134.992 | 469.473 | 42 879 | 512.352 | 647.344 |
| 32000 | 135.002 | 136.103 | 468.613 | 42.960 | 511.573 | 647.676 |
| 33000 | 136.061 | 137.185 | 467.776 | 43.038 | 510.814 | 647.999 |
| 34000 | 137.093 | 138.241 | 466.959 | 43.113 | 510.072 | 648.313 |
| 35000 | 138 099 | 139.269 | 466.164 | 43.187 | 509.351 | 648.620 |
| 36000 | 139.081 | 140.274 | 465.387 | 43.259 | 508.646 | 648.920 |
| 37000 | 140.041 | 141.256 | 464.628 | 43.329 | 507.957 | 649.213 |
| 38000 | 140.981 | 142.218 | 463.884 | 43.397 | 507.281 | 649.499 |
| 39000 | 141.903 | 143.162 | 463.155 | 43.463 | 506.618 | 649.780 |
| 40000 | 142.808 | 144.089 | 462.439 | 43.528 | 505.967 | 650.056 |
| 41000 | 143 696 | 144 999 | 461.736 | 43.592 | 505.328 | 650.327 |
| 42000 | 144.567 | 145.890 | 461.048 | 43 655 | 504.703 | 650.593 |
| 43000 | 145.422 | 146.767 | 460 371 | 43.716 | 504.087 | 650.854 |
| 44000 | 146.261 | 147.627 | 459.708 | 43.775 | 503.483 | 651.110 |
| 45000 | 147.085 | 148.472 | 459.056 | 43.833 | 502.889 | 651.361 |
| 46000 | 147.894 | 149.301 | 458.416 | 43.891 | 502.307 | 651.608 |
| 47000 | 148.688 | 150.115 | 457.788 | 43.947 | 501.735 | 651.850 |
| 48000 | 149.468 | 150.916 | 457.171 | 44.001 | 501.172 | 652.088 |
| 49000 | 150.234 | 151.702 | 456.565 | 44.054 | 500.619 | 652.321 |
| 50000 | 150.987 | 152.475 | 455.969 | 44.107 | 500.076 | 652.551 |
| 51000 | 151.728 | 153.236 | 455.383 | 44.158 | 499.541 | 652.777 |
| 52000 | 152.458 | 153.986 | 454.806 | 44.208 | 499.014 | 653.000 |
| 53000 | 153.177 | 154.725 | 454.237 | 44.257 | 498.494 | 653.219 |
| 54000 | 153 887 | 155.455 | 453.675 | 44.306 | 497.981 | 653.436 |
| 55000 | 154.586 | 156.172 | 453.122 | 44.355 | 497.477 | 653.649 |
| 56000 | 155.276 | 156 880 | 452.577 | 44.402 | 496.979 | 653.859 |
| 57000 | 155.957 | 157.581 | 452.038 | 44.448 | 496.486 | 654.067 |
| 58000 | 156.628 | 158.271 | 451.507 | 44.494 | 496.001 | 654.272 |
| 59000 | 157.290 | 158.951 | 450.984 | 44.538 | 495.522 | 654.473 |
| 60000 | 157.943 | 159.624 | 450.467 | 44.582 | 495.049 | 654.673 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30000 | 0.60625 | 0.60732 | 1.6466 | 775.85 | 1.2651 | 0.3994 |
| 31000 | 0.58786 | 0.58893 | 1.6980 | 798.61 | 1.2597 | 0.4023 |
| 32000 | 0.57056 | 0.57163 | 1.7494 | 821.32 | 1.2545 | 0.4050 |
| 33000 | 0.55428 | 0.55535 | 1.8007 | 843.93 | 1.2495 | 0.4077 |
| 34000 | 0.53891 | 0.53998 | 1.8519 | 866.49 | 1.2445 | 0.4102 |
| 35000 | 0.52441 | 0.52548 | 1.9030 | 888.93 | 1.2397 | 0.4127 |
| 36000 | 0.51070 | 0.51178 | 1.9540 | 911.27 | 1.2349 | 0.4152 |
| 37000 | 0.49770 | 0.49878 | 2.0049 | 933.55 | 1.2303 | 0.4175 |
| 38000 | 0.48536 | 0.48704 | 2.0557 | 955.75 | 1.2257 | 0.4199 |
| 39000 | 0.47364 | 0.47472 | 2.1065 | 977.86 | 1.2213 | 0.4221 |
| 40000 | 0.46249 | 0.46357 | 2.1572 | 999.89 | 1.2171 | 0.4244 |
| 41000 | 0.45187 | 0.45295 | 2.2077 | 1021.8 | 1.2131 | 0.4266 |
| 42000 | 0.44174 | 0.44282 | 2.2583 | 1043.7 | 1.2091 | 0.4287 |
| 43000 | 0.43208 | 0.43316 | 2.3086 | 1065.5 | 1.2053 | 0.4308 |
| 44000 | 0.42283 | 0.42391 | 2.3590 | 1087.2 | 1.2015 | 0.4328 |
| 45000 | 0.41398 | 0.41506 | 2.4093 | 1108.9 | 1.1979 | 0 4349 |
| 46000 | 0.40551 | 0.40659 | 2.4595 | 1130.5 | 1.1943 | 0.4368 |
| 47000 | 0.39739 | 0.39847 | 2.5096 | 1152 0 | 1.1908 | 0.4388 |
| 48000 | 0.38959 | 0.39067 | 2.5597 | 1173.5 | 1.1863 | 0.4407 |
| 49000 | 0.38210 | 0.38319 | 2.6097 | 1194.9 | 1.1829 | 0.4425 |
| 50000 | 0.37491 | 0.37600 | 2.6596 | 1216.2 | 1.1796 | 0.4443 |
| 51000 | 0.36798 | 0.36907 | 2.7095 | 1237.5 | 1.1764 | 0.4461 |
| 52000 | 0.36132 | 0.36241 | 2.7593 | 1258.7 | 1.1732 | 0.4479 |
| 53000 | 0.35489 | 0.35598 | 2.8091 | 1279.4 | 1.1701 | 0.4496 |
| 54000 | 0.34870 | 0.34979 | 2.8589 | 1301.0 | 1.1670 | 0.4513 |
| 55000 | 0.34274 | 0.34383 | 2.9084 | 1322.1 | 1.1639 | 0.4530 |
| 56000 | 0.33698 | 0.33807 | 2.9580 | 1343.0 | 1.1609 | 0.4547 |
| 57000 | 0.33141 | 0.33250 | 3.0075 | 1364.0 | 1.1579 | 0.4563 |
| 58000 | 0.32603 | 0.32712 | 3.0570 | 1384.9 | 1.1549 | 0.4579 |
| 59000 | 0.32082 | 0.32191 | 3.1065 | 1405.7 | 1.1520 | 0.4595 |
| 60000 | 0.31579 | 0.31688 | 3.1558 | 1426.5 | 1.1491 | 0.4611 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60000 | 157.943 | 159.624 | 450.467 | 44.582 | 495.049 | 654.673 |
| 61000 | 158.587 | 160.285 | 449.958 | 44.626 | 494.584 | 654 869 |
| 62000 | 159.222 | 160.939 | 449.455 | 44.669 | 494.124 | 655 063 |
| 63000 | 159.848 | 161.584 | 448.960 | 44.710 | 493.670 | 655.254 |
| 64000 | 160.466 | 162.220 | 448.471 | 44.751 | 493.222 | 655.442 |
| 65000 | 161.077 | 162.849 | 447.988 | 44.791 | 492.779 | 655.628 |
| 66000 | 161.681 | 163.472 | 447.510 | 44.831 | 492.341 | 655.813 |
| 67000 | 162.277 | 164.085 | 447.039 | 44.870 | 491.909 | 655.994 |
| 68000 | 162.866 | 164.692 | 446.573 | 44.909 | 491.482 | 656.174 |
| 69000 | 163.448 | 165.292 | 446.113 | 44.947 | 491.060 | 656 352 |
| 70000 | 164.024 | 165.886 | 445.657 | 44.984 | 490.641 | 656.527 |
| 71000 | 164.594 | 166.474 | 445.206 | 45.021 | 490.227 | 656.701 |
| 72000 | 165.158 | 167.055 | 444.760 | 45.058 | 489.818 | 656.873 |
| 73000 | 165.716 | 167.630 | 444.319 | 45.094 | 489.413 | 657.043 |
| 74000 | 166.268 | 168.200 | 443.882 | 45.130 | 489.012 | 657.212 |
| 75000 | 166.814 | 168.763 | 443.450 | 45.165 | 488.615 | 657.378 |
| 76000 | 167.355 | 169.321 | 443.022 | 45.200 | 488.222 | 657.543 |
| 77000 | 167.890 | 169.873 | 442.599 | 45.234 | 487.833 | 657.706 |
| 78000 | 168.419 | 170.419 | 442.181 | 45.368 | 487.449 | 657.868 |
| 79000 | 168.942 | 170.959 | 441.767 | 45.301 | 487.068 | 658.027 |
| 80000 | 169.459 | 171.493 | 441.358 | 45.334 | 486.692 | 658.185 |
| 81000 | 169.971 | 172.021 | 440.953 | 45.367 | 486.320 | 658.341 |
| 82000 | 170.478 | 172.544 | 440.552 | 45.400 | 485.952 | 658.496 |
| 83000 | 170.980 | 173.062 | 440.155 | 45.432 | 485.587 | 658.649 |
| 84000 | 171.477 | 173.575 | 439.762 | 45.463 | 485.225 | 658.800 |
| 85000 | 171.969 | 174.086 | 439.373 | 45.493 | 484.865 | 658 951 |
| 86000 | 172.457 | 174.590 | 438.987 | 45.523 | 484.509 | 659 099 |
| 87000 | 172.940 | 175.089 | 438.604 | 45.553 | 484.158 | 659.247 |
| 88000 | 173.419 | 175.584 | 438.226 | 45.583 | 483.809 | 659.393 |
| 79000 | 173.894 | 176.075 | 437.850 | 45.613 | 483.463 | 659.538 |
| 90000 | 174.365 | 176.563 | 437.477 | 45.641 | 483.118 | 659.681 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60000 | 0.31579 | 0.31688 | 3.1558 | 1426.5 | 1.1491 | 0.4611 |
| 61000 | 0 31092 | 0 31202 | 3.2049 | 1447.2 | 1.1463 | 0.4626 |
| 62000 | 0.30620 | 0 30730 | 3.2542 | 1467.8 | 1.1435 | 0.4641 |
| 63000 | 0.30162 | 0.30272 | 3.3034 | 1488 5 | 1.1408 | 0.4656 |
| 64000 | 0.29717 | 0.29827 | 3.3527 | 1509.1 | 1.1382 | 0.4671 |
| 65000 | 0.29286 | 0.29396 | 3.4018 | 1529.7 | 1.1356 | 0.4685 |
| 66000 | 0.28868 | 0.28978 | 3.4509 | 1550.2 | 1.1330 | 0.4700 |
| 67000 | 0.28462 | 0.28572 | 3.4999 | 1570.7 | 1.1305 | 0.4714 |
| 68000 | 0.28068 | 0.28178 | 3.5489 | 1591.0 | 1.1280 | 0.4728 |
| 69000 | 0.27685 | 0.27795 | 3.5978 | 1611 4 | 1.1255 | 0.4742 |
| 70000 | 0.27312 | 0.27422 | 3.6467 | 1631.7 | 1.1231 | 0.4755 |
| 71000 | 0.26949 | 0.27059 | 3.6956 | 1652.0 | 1.1207 | 0.4769 |
| 72000 | 0.26597 | 0.26707 | 3.7443 | 1672.2 | 1.1183 | 0.4782 |
| 73000 | 0.26253 | 0.26363 | 3.7932 | 1692.5 | 1.1160 | 0.4795 |
| 74000 | 0.25919 | 0.26029 | 3.8419 | 1712.6 | 1.1137 | 0.4808 |
| 75000 | 0.25594 | 0.25704 | 3.8904 | 1732.6 | 1.1114 | 0.4821 |
| 76000 | 0.25276 | 0.25386 | 3.9392 | 1752.7 | 1.1091 | 0.4834 |
| 77000 | 0.24967 | 0.25078 | 3.9876 | 1772.7 | 1.1069 | 0.4846 |
| 78000 | 0.24665 | 0.24776 | 4.0362 | 1792.7 | 1.1047 | 0.4858 |
| 79000 | 0.24371 | 0.24482 | 4.0846 | 1812.7 | 1.1025 | 0.4871 |
| 80000 | 0.24084 | 0.24195 | 4.1331 | 1832.6 | 1.1003 | 0.4883 |
| 81000 | 0.23804 | 0.23915 | 4.1815 | 1852.4 | 1.0982 | 0.4895 |
| 82000 | 0.23530 | 0.23641 | 4.2299 | 1872.3 | 1.0961 | 0.4906 |
| 83000 | 0.23263 | 0.23374 | 4.2783 | 1892.1 | 1.0940 | 0.4918 |
| 84000 | 0.23002 | 0.23113 | 4.3266 | 1911.8 | 1.0920 | 0.4930 |
| 85000 | 0.22746 | 0.22857 | 4.3750 | 1931.7 | 1.0900 | 0.4941 |
| 86000 | 0.22497 | 0.22608 | 4.4232 | 1951.3 | 1.0880 | 0.4953 |
| 87000 | 0.22253 | 0.22364 | 4.4715 | 1971.0 | 1.0860 | 0.4964 |
| 88000 | 0.22015 | 0 22126 | 4.5196 | 1990.6 | 1.0841 | 0.4975 |
| 89000 | 0.21781 | 0.21892 | 4.5679 | 2009.9 | 1.0822 | 0.4986 |
| 90000 | 0.21553 | 0.21664 | 4.6160 | 2029.8 | 1.0803 | 0.4997 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu.$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90000 | 174.365 | 176.563 | 437.477 | 45.641 | 483.118 | 659.681 |
| 91000 | 174.832 | 177.046 | 437.108 | 45.670 | 482 778 | 659.824 |
| 92000 | 175,295 | 177.525 | 436.742 | 45.698 | 482.440 | 659.965 |
| 93000 | 175.755 | 178 001 | 436.378 | 45.726 | 482.104 | 660.105 |
| 94000 | 176.212 | 178.474 | 436.016 | 45.755 | 481.771 | 660.245 |
| 95000 | 176.666 | 178.944 | 435.657 | 45.782 | 481.439 | 660.383 |
| 96000 | 177.116 | 179.410 | 435.301 | 45.809 | 481.110 | 660.520 |
| 97000 | 177.563 | 179.873 | 434.948 | 45.836 | 480.784 | 660.657 |
| 98000 | 178.007 | 180.333 | 434.596 | 45.863 | 480.459 | 660.792 |
| 99000 | 178.448 | 180.789 | 434.248 | 45.890 | 480.138 | 660.927 |
| 100000 | 178.886 | 181.243 | 433.901 | 45.916 | 479.817 | 661.060 |
| 105000 | 181.008 | 183.440 | 432.223 | 46.044 | 478.267 | 661.707 |
| 110000 | 183.053 | 185.560 | 430 605 | 46.166 | 476.771 | 662.331 |
| 115000 | 185.027 | 187.608 | 429.044 | 46.281 | 475.325 | 662.933 |
| 120000 | 186.935 | 189.591 | 427.534 | 46.390 | 473.924 | 663.515 |
| 125000 | 188.781 | 191.512 | 426.074 | 46.492 | 472.566 | 664.078 |
| 130000 | 190.570 | 193.370 | 424.662 | 46.592 | 471.254 | 664.624 |
| 135000 | 192.306 | 195.177 | 423.286 | 46.690 | 469.976 | 665.153 |
| 140000 | 193.993 | 196.933 | 421.952 | 46.783 | 468.735 | 665.668 |
| 145000 | 195.635 | 198.646 | 420.653 | 46.870 | 467.523 | 666.169 |
| 150000 | 197.237 | 200.317 | 419.386 | 46.954 | 466.340 | 666.657 |
| 155000 | 198.799 | 201.946 | 418.150 | 47.038 | 465.188 | 667 134 |
| 160000 | 200.322 | 203 536 | 416.945 | 47.117 | 464.062 | 667.598 |
| 165000 | 201.808 | 205.088 | 415.770 | 47.193 | 462.963 | 668.051 |
| 170000 | 203.259 | 206.604 | 414.622 | 47.268 | 461.89 , | 668.494 |
| 175000 | 204.678 | 208.088 | 413.500 | 47.339 | 460.839 | 668.927 |
| 180000 | 206.067 | 209.541 | 412.401 | 47.408 | 459.809 | 669.350 |
| 185000 | 207.426 | 210.964 | 411.326 | 47.475 | 458.801 | 669.765 |
| 190000 | 208.757 | 212.358 | 410.273 | 47.540 | 457.813 | 670.171 |
| 195000 | 210.062 | 213.725 | 409.241 | 47.603 | 456.844 | 670.569 |
| 200000 | 211 341 | 215.066 | 408.229 | 47.664 | 455.893 | 670.959 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90000 | 0.21553 | 0.21664 | 4.6160 | 2029.8 | 1.0803 | 0.4997 |
| 91000 | 0.21329 | 0.21440 | 4.6642 | 2049.4 | 1.0784 | 0.5008 |
| 92000 | 0.21110 | 0 21221 | 4.7123 | 2068.9 | 1.0765 | 0 5018 |
| 93000 | 0 20896 | 0 21008 | 4.7601 | 2088 3 | 1.0746 | 0.5029 |
| 94000 | 0.20687 | 0.20799 | 4.8079 | 2107.7 | 1.0728 | 0.5039 |
| 95000 | 0.20481 | 0.20593 | 4.8560 | 2127.1 | 1.0710 | 0 5050 |
| 96000 | 0.20280 | 0.20392 | 4.9039 | 2146.5 | 1.0692 | 0.5060 |
| 97000 | 0.20083 | 0.20195 | 4.9517 | 2165.8 | 1.0674 | 0.5070 |
| 98000 | 0.19890 | 0.20002 | 4.9995 | 2185.0 | 1.0657 | 0.5080 |
| 99000 | 0.19700 | 0.19812 | 5.0474 | 2204.3 | 1.0640 | 0.5090 |
| 100000 | 0.19514 | 0.19626 | 5.0953 | 2223.5 | 1.0623 | 0.5100 |
| 105000 | 0.18637 | 0 18750 | 5.3333 | 2319.2 | 1.0541 | 0.5149 |
| 110000 | 0.17837 | 0.17950 | 5.5710 | 2414.1 | 1.0462 | 0.5196 |
| 115000 | 0.17104 | 0.17217 | 5.8082 | 2508.4 | 1.0387 | 0 5241 |
| 120000 | 0.16430 | 0.16544 | 6.0445 | 2602.2 | 1.0314 | 0.5284 |
| 125000 | 0.15807 | 0.15921 | 6.2810 | 2695.5 | 1.0243 | 0 5326 |
| 130000 | 0.15232 | 0.15346 | 6.5164 | 2788.9 | 1.0174 | 0.5366 |
| 135000 | 0.14699 | 0.14813 | 6.7508 | 2879.7 | 1.0107 | 0.5405 |
| 140000 | 0.14202 | 0.14317 | 6.9847 | 2971.1 | 1.0042 | 0.5443 |
| 145000 | 0.13738 | 0.13853 | 7.2187 | 3062.0 | 0 9979 | 0.5480 |
| 150000 | 0.13304 | 0.13419 | 7.4521 | 3152.3 | 0.9920 | 0 5515 |
| 155000 | 0.12898 | 0.13013 | 7.6846 | 3242.0 | 0.9860 | 0.5549 |
| 160000 | 0.12515 | 0.12631 | 7.9170 | 3331.6 | 0.9808 | 0.5583 |
| 165000 | 0.12156 | 0.12272 | 8.1486 | 3418.3 | 0 9752 | 0.5615 |
| 170000 | 0.11817 | 0.11933 | 8.3801 | 3508.7 | 0.9690 | 0.5647 |
| 175000 | 0.11497 | 0.11613 | 8.6110 | 3596 6 | 0.9646 | 0 5678 |
| 180000 | 0.11194 | 0.11311 | 8.8410 | 3684.1 | 0.9596 | 0 5708 |
| 185000 | 0.10906 | 0.11023 | 9.0719 | 3771.6 | 0.9548 | 0.5737 |
| 190000 | 0.10634 | 0.10751 | 9.3015 | 3858.1 | 0.9502 | 0.5766 |
| 195000 | 0.10375 | 0.10492 | 9.5310 | 3944.5 | 0.9458 | 0.5794 |
| 200000 | 0.10129 | 0.10246 | 9.7599 | 4030.3 | 0 9416 | 0.5822 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200.000 | 211.341 | 215.066 | 408.229 | 47.664 | 455.893 | 670.959 |
| 205.000 | 212.596 | 216 382 | 407.237 | 47.723 | 454.960 | 671.342 |
| 210.000 | 213 828 | 217.675 | 406.262 | 47.781 | 454 043 | 671.718 |
| 215.000 | 215.037 | 218.945 | 405.306 | 47.836 | 453.141 | 672.086 |
| 220.000 | 216.225 | 220.193 | 404.366 | 47.890 | 452.256 | 672.449 |
| 225.000 | 217.393 | 221.420 | 403.442 | 47.943 | 451.385 | 672.805 |
| 230.000 | 218.542 | 222.628 | 402.533 | 47.994 | 450.527 | 673.155 |
| 235.000 | 219.673 | 223.818 | 401.639 | 48.044 | 449.682 | 673.500 |
| 240.000 | 220.787 | 224.990 | 400.757 | 48.093 | 448.850 | 673.840 |
| 245.000 | 221.884 | 226.145 | 399.890 | 48.140 | 448.030 | 674.175 |
| 250.000 | 222.964 | 227.283 | 399.035 | 48.186 | 447.221 | 674.504 |
| 255.000 | 224.028 | 228.405 | 398.194 | 48.230 | 446.424 | 674.829 |
| 260.000 | 225.076 | 229.511 | 397.365 | 48.272 | 445.637 | 675.148 |
| 265.000 | 226.109 | 230.601 | 396.548 | 48.314 | 444.862 | 675.463 |
| 270.000 | 227.127 | 231.675 | 395.743 | 48.356 | 444,099 | 675.774 |
| 275.000 | 228.130 | 232.733 | 394.949 | 48.397 | 443.347 | 676.080 |
| 280.000 | 229.119 | 233.777 | 394.167 | 48.437 | 442.604 | 676.381 |
| 285.000 | 230.094 | 234.807 | 393.396 | 48.476 | 441.872 | 676.679 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200.000 | 0.10129 | 0.10246 | 9.7599 | 4030.3 | 0.9416 | 0.5822 |
| 205.000 | 0.09894 | 0.10012 | 9.9880 | 4116.0 | 0.9376 | 0.5849 |
| 210.000 | 0.09670 | 0.09788 | 10.2166 | 4201.3 | 0.9335 | 0.5875 |
| 215.000 | 0.09456 | 0.09574 | 10.4450 | 4286.2 | 0.9294 | 0.5902 |
| 220.000 | 0.09251 | 0.09369 | 10.6735 | 4371.1 | 0.9255 | 0.5927 |
| 225.000 | 0.09056 | 0.09174 | 10.9004 | 4455.0 | 0.9216 | 0.5953 |
| 230.000 | 0.08869 | 0.08988 | 11.1259 | 4538.6 | 0.9178 | 0.5978 |
| 235.000 | 0.08689 | 0.08808 | 11.3533 | 4622.4 | 0.9140 | 0.6002 |
| 240 000 | 0.08516 | 0.08635 | 11.5808 | 4705.9 | 0.9103 | 0 6027 |
| 245.000 | 0.08351 | 0,08370 | 11.9474 | 4788.5 | 0.9066 | 0.6050 |
| 250.000 | 0.08192 | 0.08311 | 12.0322 | 4871.0 | 0.9030 | 0.6074 |
| 255.000 | 0.08039 | 0.08159 | 12.2564 | 4953.3 | 0.8995 | 0.6097 |
| 260.000 | 0 07891 | 0.08011 | 12.4828 | 5035.7 | 0.8961 | 0.6119 |
| 265.000 | 0.07748 | 0.07868 | 12.8733 | 5118.1 | 0.8927 | 0.6142 |
| 270.000 | 0.07613 | 0.07733 | 12.9316 | 5198.2 | 0.8893 | 0.6163 |
| 275.000 | 0.07481 | 0.07601 | 13.1562 | 5279.3 | 0.8860 | 0.6185 |
| 280.000 | 0.07353 | 0.07473 | 13.3815 | 5360.6 | 0.8828 | 0.6206 |
| 285.000 | 0.07229 | 0 07350 | 13.6054 | 5441.9 | 0.8796 | 0.6227 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9000 | 96.176 | 96 628 | 499 325 | 39.881 | 539.206 | 635.834 |
| 9100 | 96.476 | 96.932 | 499,087 | 39,906 | 538 993 | 635.925 |
| 9200 | 96.774 | 97.233 | 498 852 | 39.931 | 538.783 | 636.016 |
| 9300 | 97.069 | 97.532 | 498.618 | 39.956 | 538 574 | 636.106 |
| 9400 | 97.362 | 97.828 | 498 387 | 39.980 | 538.367 | 636.195 |
| 9500 | 97.653 | 98.123 | 498.156 | 40.005 | 538.161 | 636.284 |
| 9600 | 97.942 | 98.415 | 497.928 | 40.029 | 537.957 | 636.372 |
| 9700 | 98.229 | 98.706 | 497.701 | 40.053 | 537.754 | 636.460 |
| 9800 | 98.514 | 98.995 | 497.475 | 40.077 | 537.552 | 636 547 |
| 9900 | 98.797 | 99.270 | 497.252 | 40.101 | 537.363 | 636.633 |
| 10000 | 99.078 | 99.566 | 497.029 | 40.124 | 537.153 | 636.719 |
| 10333 | 100.000 | 100.500 | 496.300 | 40 200 | 536 500 | 637 000 |
| 11000 | 101.756 | 102.277 | 494.911 | 40 348 | 535.259 | 637.536 |
| 12000 | 104.232 | 104.786 | 492.952 | 40.553 | 533.505 | 638.291 |
| 13000 | 106 544 | 107.131 | 491.124 | 40.741 | 531.865 | 638 996 |
| 14000 | 108 712 | 109 332 | 489.409 | 40 916 | 630 325 | 639 657 |
| 15000 | 110 760 | 111.413 | 487 789 | 41.080 | 528.869 | 640.282 |
| 16000 | 112 698 | 113 380 | 486.256 | 41.237 | 527.493 | 640.873 |
| 17000 | 114.537 | 115.248 | 483 801 | 41 385 | 526.186 | 641.434 |
| 18000 | 116.288 | 117.029 | 483.416 | 41.523 | 524.939 | 641.968 |
| 19000 | 117 959 | 118.729 | 482.094 | 41.654 | 523.748 | 642,477 |
| 20000 | 119.560 | 120 359 | 480.828 | 41.779 | 522.607 | 642.966 |
| 21000 | 121 102 | 121.928 | 479 608 | 41.900 | 521.508 | 643.436 |
| 22000 | 122.587 | 123.439 | 478.434 | 42.016 | 520 450 | 643.889 |
| 23000 | 124 017 | 124.896 | 477 303 | 42.126 | 519.429 | 644.325 |
| 24000 | 125 394 | 126.299 | 476.213 | 42.233 | 518.446 | 644.745 |
| 25000 | 126.723 | 127.655 | 475.162 | 42.334 | 517.496 | 645.151 |
| 26000 | 128.009 | 128.965 | 474.145 | 42.433 | 516.578 | 645 543 |
| 27000 | 129.257 | 130 238 | 473.158 | 42 528 | 515.685 | 645.923 |
| 28000 | 130.470 | 131.475 | 472.198 | 42.620 | 514 818 | 646.293 |
| 29000 | 131.650 | 132.680 | 471.265 | 42.708 | 513 973 | 646 653 |
| 30000 | 132.798 | 133.852 | 470.357 | 42.794 | 513.151 | 647.003 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9000 | 1.8833 | 1.88434 | 0.5307 | 265.13 | 1.4611 | 0.3033 |
| 9100 | 1.8637 | 1.86474 | 0.5363 | 267.78 | 1.4595 | 0.3041 |
| 9200 | 1.8446 | 1.84564 | 0.5418 | 270.42 | 1.4577 | 0.3049 |
| 9300 | 1.8259 | 1.82694 | 0.5474 | 273.06 | 1.4560 | 0.3057 |
| 9400 | 1.8076 | 1.80864 | 0.5529 | 275.70 | 1.4543 | 0 3065 |
| 9500 | 1.7897 | 1.79074 | 0.5584 | 278.35 | 1.4526 | 0.3073 |
| 9600 | 1.7721 | 1.77314 | 0.5640 | 280.97 | 1.4509 | 0.3081 |
| 9700 | 1.7549 | 1.75594 | 0.5695 | 283.59 | 1.4492 | 0.3089 |
| 9800 | 1.7380 | 1.73904 | 0.5750 | 286.22 | 1.4475 | 0.3097 |
| 9900 | 1.7215 | 1.72254 | 0.5805 | 288.84 | 1.4459 | 0.3104 |
| 10000 | 1.7053 | 1.70634 | 0.5860 | 291.46 | 1.4441 | 0.3112 |
| 10333 | 1.6634 | 1.66454 | 0.6008 | 300.13 | 1.4390 | 0.3136 |
| 11000 | 1.5589 | 1.55994 | 0.6410 | 317.48 | 1.4289 | 0.3185 |
| 12000 | 1.4363 | 1.43734 | 0.6957 | 343.21 | 1.4148 | 0.3252 |
| 13000 | 1.3319 | 1.33294 | 0.7502 | 368.74 | 1.4019 | 0.3313 |
| 14000 | 1.2421 | 1.24315 | 0.8044 | 394.02 | 1.3899 | 0.3371 |
| 15000 | 1.1639 | 1.16495 | 0.8584 | 419.10 | 1 3787 | 0.3426 |
| 16000 | 1.0954 | 1.09645 | 0.9120 | 443 91 | 1.3682 | 0.3477 |
| 17000 | 1.0346 | 1.03565 | 0.9656 | 468 59 | 1.3583 | 0.5525 |
| 18000 | 0.98040 | 0.98145 | 1.0189 | 492.55 | 1 3490 | 0.3571 |
| 19000 | 0.93173 | 0.93278 | 1.0721 | 517.42 | 1.3402 | 0.3615 |
| 20000 | 0.88780 | 0.88886 | 1.1250 | 540.95 | 1.3318 | 0 3656 |
| 21000 | 0 84798 | 0.84904 | 1.1778 | 565.59 | 1.3238 | 0 3696 |
| 22000 | 0 81167 | 0.81273 | 1.2304 | 589 44 | 1.3161 | 0 3735 |
| 23000 | 0.77842 | 0.77948 | 1.2829 | 613.17 | 1.3088 | 0.3771 |
| 24000 | 0.74788 | 0.74894 | 1.3352 | 636.75 | 1.3018 | 0 3807 |
| 25000 | 0.71968 | 0 72074 | 1.3875 | 660.24 | 1.2951 | 0 3840 |
| 26000 | 0.69362 | 0.69468 | 1.4395 | 683.58 | 1.2887 | 0 3873 |
| 27000 | 0.66942 | 0 67048 | 1.4915 | 706 82 | 1.2825 | 0 3905 |
| 28000 | 0.64691 | 0.64798 | 1.5433 | 729.93 | 1.2765 | 0.3936 |
| 29000 | 0.62589 | 0.62696 | 1.5950 | 752.95 | 1.2707 | 0.3965 |
| 30000 | 0.60625 | 0.60732 | 1.6466 | 775.85 | 1.2651 | 0.3994 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30000 | 132.798 | 133.852 | 470.357 | 42.794 | 513.151 | 647.003 |
| 31000 | 133.915 | 134.992 | 469.473 | 42 879 | 512.352 | 647.344 |
| 32000 | 135.002 | 136.103 | 468.613 | 42.960 | 511.573 | 647.676 |
| 33000 | 136.061 | 137.185 | 467.776 | 43.038 | 510.814 | 647.999 |
| 34000 | 137.093 | 138.241 | 466.959 | 43.113 | 510.072 | 648.313 |
| 35000 | 138 099 | 139.269 | 466.164 | 43.187 | 509.351 | 648.620 |
| 36000 | 139.081 | 140.274 | 465.387 | 43.259 | 508.646 | 648.920 |
| 37000 | 140.041 | 141.256 | 464.628 | 43.329 | 507.957 | 649.213 |
| 38000 | 140.981 | 142.218 | 463.884 | 43.397 | 507.281 | 649.499 |
| 39000 | 141.903 | 143.162 | 463.155 | 43.463 | 506.618 | 649.780 |
| 40000 | 142.808 | 144.089 | 462.439 | 43.528 | 505.967 | 650.056 |
| 41000 | 143 696 | 144 999 | 461.736 | 43.592 | 505.328 | 650.327 |
| 42000 | 144.567 | 145.890 | 461.048 | 43 655 | 504.703 | 650.593 |
| 43000 | 145.422 | 146.767 | 460 371 | 43.716 | 504.087 | 650.854 |
| 44000 | 146.261 | 147.627 | 459.708 | 43.775 | 503.483 | 651.110 |
| 45000 | 147.085 | 148.472 | 459.056 | 43.833 | 502.889 | 651.361 |
| 46000 | 147.894 | 149.301 | 458.416 | 43.891 | 502.307 | 651.608 |
| 47000 | 148.688 | 150.115 | 457.788 | 43.947 | 501.735 | 651.850 |
| 48000 | 149.468 | 150.916 | 457.171 | 44.001 | 501.172 | 652.088 |
| 49000 | 150.234 | 151.702 | 456.565 | 44.054 | 500.619 | 652.321 |
| 50000 | 150.987 | 152.475 | 455.969 | 44.107 | 500.076 | 652.551 |
| 51000 | 151.728 | 153.236 | 455.383 | 44.158 | 499.541 | 652.777 |
| 52000 | 152.458 | 153.986 | 454.806 | 44.208 | 499.014 | 653.000 |
| 53000 | 153.177 | 154.725 | 454.237 | 44.257 | 498.494 | 653.219 |
| 54000 | 153.887 | 155.455 | 453.675 | 44.306 | 497.981 | 653.436 |
| 55000 | 154.586 | 156.172 | 453.122 | 44.355 | 497.477 | 653.649 |
| 56000 | 155.276 | 156 880 | 452.577 | 44.402 | 496.979 | 653.859 |
| 57000 | 155.957 | 157.581 | 452.038 | 44.448 | 496.486 | 654.067 |
| 58000 | 156.628 | 158.271 | 451.507 | 44.494 | 496.001 | 654.272 |
| 59000 | 157.290 | 158.951 | 450.984 | 44.538 | 495.522 | 654.473 |
| 60000 | 157.943 | 159.624 | 450.467 | 44.582 | 495.049 | 654.673 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30000 | 0.60625 | 0.60732 | 1.6466 | 775.85 | 1.2651 | 0.3994 |
| 31000 | 0.58786 | 0.58893 | 1.6980 | 798.61 | 1.2597 | 0.4023 |
| 32000 | 0.57056 | 0.57163 | 1.7494 | 821.32 | 1.2545 | 0.4050 |
| 33000 | 0.55428 | 0.55535 | 1.8007 | 843.93 | 1.2495 | 0.4077 |
| 34000 | 0.53891 | 0.53998 | 1.8519 | 866.49 | 1.2445 | 0.4102 |
| 35000 | 0.52441 | 0.52548 | 1.9030 | 888.93 | 1.2397 | 0.4127 |
| 36000 | 0.51070 | 0.51178 | 1.9540 | 911.27 | 1.2349 | 0.4152 |
| 37000 | 0.49770 | 0.49878 | 2.0049 | 933.55 | 1.2303 | 0.4175 |
| 38000 | 0.48536 | 0.48704 | 2.0557 | 955.75 | 1.2257 | 0.4199 |
| 39000 | 0.47364 | 0.47472 | 2.1065 | 977.86 | 1.2213 | 0.4221 |
| 40000 | 0.46249 | 0.46357 | 2.1572 | 999.89 | 1.2171 | 0.4244 |
| 41000 | 0.45187 | 0.45295 | 2.2077 | 1021.8 | 1.2131 | 0.4266 |
| 42000 | 0.44174 | 0.44282 | 2.2583 | 1043.7 | 1.2091 | 0.4287 |
| 43000 | 0.43208 | 0.43316 | 2.3086 | 1065.5 | 1.2053 | 0.4308 |
| 44000 | 0.42283 | 0.42391 | 2.3590 | 1087.2 | 1.2015 | 0.4328 |
| 45000 | 0.41398 | 0.41506 | 2.4093 | 1108.9 | 1.1979 | 0 4349 |
| 46000 | 0.40551 | 0.40659 | 2.4595 | 1130.5 | 1.1943 | 0.4368 |
| 47000 | 0.39739 | 0.39847 | 2.5096 | 1152 0 | 1.1908 | 0.4388 |
| 48000 | 0.38959 | 0.39067 | 2.5597 | 1173.5 | 1.1863 | 0.4407 |
| 49000 | 0.38210 | 0.38319 | 2.6097 | 1194.9 | 1.1829 | 0.4425 |
| 50000 | 0.37491 | 0.37600 | 2.6596 | 1216.2 | 1.1796 | 0.4443 |
| 51000 | 0.36798 | 0.36907 | 2.7095 | 1237.5 | 1.1764 | 0.4461 |
| 52000 | 0.36132 | 0.36241 | 2.7593 | 1258.7 | 1.1732 | 0.4479 |
| 53000 | 0.35489 | 0.35598 | 2.8091 | 1279.4 | 1.1701 | 0.4496 |
| 54000 | 0.34870 | 0.34979 | 2.8589 | 1301.0 | 1.1670 | 0.4513 |
| 55000 | 0.34274 | 0.34383 | 2.9084 | 1322.1 | 1.1639 | 0.4530 |
| 56000 | 0.33698 | 0.33807 | 2.9580 | 1343.0 | 1.1609 | 0.4547 |
| 57000 | 0.33141 | 0.33250 | 3.0075 | 1364.0 | 1.1579 | 0.4563 |
| 58000 | 0.32603 | 0.32712 | 3.0570 | 1384.9 | 1.1549 | 0.4579 |
| 59000 | 0.32082 | 0.32191 | 3.1065 | 1405.7 | 1.1520 | 0.4595 |
| 60000 | 0.31579 | 0.31688 | 3.1558 | 1426.5 | 1.1491 | 0.4611 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60000 | 157.943 | 159.624 | 450.467 | 44.582 | 495.049 | 654.673 |
| 61000 | 158.587 | 160.285 | 449.958 | 44.626 | 494.584 | 654 869 |
| 62000 | 159.222 | 160.939 | 449.455 | 44.669 | 494.124 | 655 063 |
| 63000 | 159.848 | 161.584 | 448.960 | 44.710 | 493.670 | 655.254 |
| 64000 | 160.466 | 162.220 | 448.471 | 44.751 | 493.222 | 655.442 |
| 65000 | 161 077 | 162.849 | 447.988 | 44.791 | 492.779 | 655.628 |
| 66000 | 161.681 | 163.472 | 447.510 | 44.831 | 492.341 | 655.813 |
| 67000 | 162.277 | 164.085 | 447.039 | 44.870 | 491.909 | 655.994 |
| 68000 | 162.866 | 164.692 | 446.573 | 44.909 | 491.482 | 656.174 |
| 69000 | 163.448 | 165.292 | 446.113 | 44.947 | 491.060 | 656.352 |
| 70000 | 164.024 | 165.886 | 445.657 | 44.984 | 490.641 | 656.527 |
| 71000 | 164.594 | 166.474 | 445.206 | 45.021 | 490.227 | 656.701 |
| 72000 | 165.158 | 167.055 | 444.760 | 45.058 | 489.818 | 656.873 |
| 73000 | 165.716 | 167.630 | 444.319 | 45.094 | 489.413 | 657.043 |
| 74000 | 166.268 | 168.200 | 443.882 | 45.130 | 489.012 | 657.212 |
| 75000 | 166.814 | 168.763 | 443.450 | 45.165 | 488.615 | 657.378 |
| 76000 | 167.355 | 169.321 | 443.022 | 45.200 | 488.222 | 657.543 |
| 77000 | 167.890 | 169.873 | 442.599 | 45.234 | 487.833 | 657.706 |
| 78000 | 168.419 | 170.419 | 442.181 | 45.368 | 487.449 | 657.868 |
| 79000 | 168.942 | 170.959 | 441.767 | 45.301 | 487.068 | 658.027 |
| 80000 | 169.459 | 171.493 | 441.358 | 45.334 | 486.692 | 658.185 |
| 81000 | 169.971 | 172.021 | 440.953 | 45.367 | 486.320 | 658.341 |
| 82000 | 170.478 | 172.544 | 440.552 | 45.400 | 485.952 | 658.496 |
| 83000 | 170.980 | 173.062 | 440.155 | 45.432 | 485.587 | 658.649 |
| 84000 | 171.477 | 173.575 | 439.762 | 45.463 | 485.225 | 658.800 |
| 85000 | 171.969 | 174.086 | 439.373 | 45.493 | 484.865 | 658 951 |
| 86000 | 172.457 | 174.590 | 438.987 | 45.523 | 484.509 | 659 099 |
| 87000 | 172.940 | 175.089 | 438.604 | 45.553 | 484.158 | 659.247 |
| 88000 | 173.419 | 175.584 | 438.226 | 45.583 | 483.809 | 659.393 |
| 79000 | 173.894 | 176.075 | 437.850 | 45.613 | 483.463 | 659.538 |
| 90000 | 174.365 | 176.563 | 437.477 | 45.641 | 483.118 | 659.681 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60000 | 0.31579 | 0.31688 | 3.1558 | 1426.5 | 1.1491 | 0.4611 |
| 61000 | 0 31092 | 0 31202 | 3.2049 | 1447.2 | 1.1463 | 0.4626 |
| 62000 | 0.30620 | 0 30730 | 3.2542 | 1467.8 | 1.1435 | 0.4641 |
| 63000 | 0.30162 | 0.30272 | 3.3034 | 1488 5 | 1.1408 | 0.4656 |
| 64000 | 0.29717 | 0.29827 | 3.3527 | 1509.1 | 1.1382 | 0.4671 |
| 65000 | 0.29286 | 0.29396 | 3.4018 | 1529.7 | 1.1356 | 0.4685 |
| 66000 | 0.28868 | 0.28978 | 3.4509 | 1550.2 | 1.1330 | 0.4700 |
| 67000 | 0.28462 | 0.28572 | 3.4999 | 1570.7 | 1.1305 | 0.4714 |
| 68000 | 0.28068 | 0.28178 | 3.5489 | 1591.0 | 1.1280 | 0.4728 |
| 69000 | 0.27685 | 0.27795 | 3.5978 | 1611 4 | 1.1255 | 0.4742 |
| 70000 | 0.27312 | 0.27422 | 3.6467 | 1631.7 | 1.1231 | 0.4755 |
| 71000 | 0.26949 | 0.27059 | 3.6956 | 1652.0 | 1.1207 | 0.4769 |
| 72000 | 0.26597 | 0.26707 | 3.7443 | 1672.2 | 1.1183 | 0.4782 |
| 73000 | 0.26253 | 0.26363 | 3.7932 | 1692.5 | 1.1160 | 0 4795 |
| 74000 | 0.25919 | 0.26029 | 3.8419 | 1712.6 | 1.1137 | 0.4808 |
| 75000 | 0 25594 | 0.25704 | 3.8904 | 1732.6 | 1.1114 | 0.4821 |
| 76000 | 0.25276 | 0.25386 | 3.9392 | 1752.7 | 1.1091 | 0.4834 |
| 77000 | 0.24967 | 0.25078 | 3.9876 | 1772.7 | 1.1069 | 0.4846 |
| 78000 | 0.24665 | 0.24776 | 4.0362 | 1792.7 | 1.1047 | 0.4858 |
| 79000 | 0.24371 | 0.24482 | 4.0846 | 1812.7 | 1.1025 | 0.4871 |
| 80000 | 0.24084 | 0.24195 | 4.1331 | 1832.6 | 1.1003 | 0.4883 |
| 81000 | 0.23804 | 0.23915 | 4.1815 | 1852.4 | 1.0982 | 0.4895 |
| 82000 | 0.23530 | 0.23641 | 4.2299 | 1872.3 | 1.0961 | 0.4906 |
| 83000 | 0.23263 | 0.23374 | 4.2783 | 1892.1 | 1.0940 | 0.4918 |
| 84000 | 0.23002 | 0.23113 | 4.3266 | 1911.8 | 1.0920 | 0.4930 |
| 85000 | 0.22746 | 0.22857 | 4.3750 | 1931.7 | 1.0900 | 0.4941 |
| 86000 | 0.22497 | 0.22608 | 4.4232 | 1951.3 | 1.0880 | 0.4953 |
| 87000 | 0.22253 | 0.22364 | 4.4715 | 1971.0 | 1.0860 | 0.4964 |
| 88000 | 0.22015 | 0 22126 | 4.5196 | 1990.6 | 1.0841 | 0.4975 |
| 89000 | 0.21781 | 0.21892 | 4.5679 | 2009.9 | 1.0822 | 0.4986 |
| 90000 | 0.21553 | 0.21664 | 4.6160 | 2029.8 | 1.0803 | 0.4997 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu.$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90000 | 174.365 | 176.563 | 437.477 | 45.641 | 483.118 | 659.681 |
| 91000 | 174.832 | 177.046 | 437.108 | 45.670 | 482 778 | 659.824 |
| 92000 | 175,295 | 177.525 | 436.742 | 45.698 | 482.440 | 659.965 |
| 93000 | 175.755 | 178 001 | 436.378 | 45.726 | 482.104 | 660.105 |
| 94000 | 176.212 | 178.474 | 436.016 | 45.755 | 481.771 | 660.245 |
| 95000 | 176.666 | 178.944 | 435.657 | 45.782 | 481.439 | 660.383 |
| 96000 | 177.116 | 179.410 | 435.301 | 45.809 | 481.110 | 660.520 |
| 97000 | 177.563 | 179.873 | 434.948 | 45.836 | 480.784 | 660.657 |
| 98000 | 178.007 | 180.333 | 434.596 | 45.863 | 480.459 | 660.792 |
| 99000 | 178.448 | 180.789 | 434.248 | 45.890 | 480.138 | 660.927 |
| 100000 | 178.886 | 181.243 | 433.901 | 45.916 | 479 817 | 661.060 |
| 105000 | 181.008 | 183.440 | 432.223 | 46.044 | 478.267 | 661.707 |
| 110000 | 183.053 | 185.560 | 430 605 | 46.166 | 476.771 | 662.331 |
| 115000 | 185.027 | 187.608 | 429.044 | 46.281 | 475.325 | 662.933 |
| 120000 | 186.935 | 189.591 | 427.534 | 46.390 | 473.924 | 663.515 |
| 125000 | 188.781 | 191.512 | 426.074 | 46.492 | 472.566 | 664 078 |
| 130000 | 190.570 | 193.370 | 424.662 | 46.592 | 471.254 | 664.624 |
| 135000 | 192.306 | 195.177 | 423.286 | 46.690 | 469.976 | 665.153 |
| 140000 | 193.993 | 196.933 | 421.952 | 46.783 | 468.735 | 665.668 |
| 145000 | 195.635 | 198.646 | 420.653 | 46.870 | 467.523 | 666.169 |
| 150000 | 197.237 | 200.317 | 419.386 | 46.954 | 466.340 | 666.657 |
| 155000 | 198.799 | 201.946 | 418.150 | 47.038 | 465.188 | 667 134 |
| 160000 | 200.322 | 203 536 | 416.945 | 47.117 | 464.062 | 667.598 |
| 165000 | 201.808 | 205.088 | 415.770 | 47.193 | 462 963 | 668.051 |
| 170000 | 203.259 | 206.604 | 414.622 | 47.268 | 461.89 ) | 668.494 |
| 175000 | 204.678 | 208.088 | 413.500 | 47.339 | 460.839 | 668.927 |
| 180000 | 206.067 | 209.541 | 412.401 | 47.408 | 459.809 | 669.350 |
| 185000 | 207.426 | 210.964 | 411.326 | 47.475 | 458.801 | 669.765 |
| 190000 | 208 757 | 212.358 | 410.273 | 47.540 | 457.813 | 670.171 |
| 195000 | 210.062 | 213.725 | 409.241 | 47.603 | 456.844 | 670.569 |
| 200000 | 211 341 | 215.066 | 408.229 | 47.664 | 455.893 | 670.959 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90000 | 0.21553 | 0.21664 | 4.6160 | 2029.8 | 1.0803 | 0.4997 |
| 91000 | 0.21329 | 0.21440 | 4.6642 | 2049.4 | 1.0784 | 0.5008 |
| 92000 | 0.21110 | 0 21221 | 4.7123 | 2068.9 | 1.0765 | 0 5018 |
| 93000 | 0 20896 | 0 21008 | 4.7601 | 2088 3 | 1.0746 | 0.5029 |
| 94000 | 0.20687 | 0.20799 | 4.8079 | 2107.7 | 1.0728 | 0.5039 |
| 95000 | 0.20481 | 0.20593 | 4.8560 | 2127.1 | 1.0710 | 0.5050 |
| 96000 | 0.20280 | 0.20392 | 4.9039 | 2146.5 | 1.0692 | 0.5060 |
| 97000 | 0.20083 | 0.20195 | 4.9517 | 2165.8 | 1.0674 | 0.5070 |
| 98000 | 0.19890 | 0.20002 | 4.9995 | 2185.0 | 1.0657 | 0.5080 |
| 99000 | 0.19700 | 0.19812 | 5.0474 | 2204.3 | 1.0640 | 0.5090 |
| 100000 | 0.19514 | 0.19626 | 5.0953 | 2223.5 | 1.0623 | 0.5100 |
| 105000 | 0.18637 | 0 18750 | 5.3333 | 2319.2 | 1.0541 | 0.5149 |
| 110000 | 0.17837 | 0.17950 | 5.5710 | 2414.1 | 1.0462 | 0.5196 |
| 115000 | 0.17104 | 0.17217 | 5.8082 | 2508.4 | 1.0387 | 0 5241 |
| 120000 | 0.16430 | 0.16544 | 6.0445 | 2602.2 | 1.0314 | 0.5284 |
| 125000 | 0.15807 | 0.15921 | 6.2810 | 2695.5 | 1.0243 | 0 5326 |
| 130000 | 0.15232 | 0.15346 | 6.5164 | 2788.9 | 1.0174 | 0.5366 |
| 135000 | 0.14699 | 0.14813 | 6.7508 | 2879.7 | 1 0107 | 0.5405 |
| 140000 | 0.14202 | 0.14317 | 6.9847 | 2971.1 | 1.0042 | 0.5443 |
| 145000 | 0.13738 | 0.13853 | 7.2187 | 3062.0 | 0 9979 | 0.5480 |
| 150000 | 0.13304 | 0.13419 | 7.4521 | 3152.3 | 0.9920 | 0.5515 |
| 155000 | 0.12898 | 0.13013 | 7.6846 | 3242.0 | 0.9860 | 0.5549 |
| 160000 | 0.12515 | 0.12631 | 7.9170 | 3331.6 | 0.9808 | 0.5583 |
| 165000 | 0.12156 | 0.12272 | 8.1486 | 3418.3 | 0.9752 | 0.5615 |
| 170000 | 0.11817 | 0.11933 | 8.3801 | 3508.7 | 0.9690 | 0.5647 |
| 175000 | 0.11497 | 0.11613 | 8.6110 | 3596 6 | 0.9646 | 0 5678 |
| 180000 | 0.11194 | 0.11311 | 8.8410 | 3684.1 | 0.9596 | 0 5708 |
| 185000 | 0.10906 | 0.11023 | 9.0719 | 3771.6 | 0.9548 | 0.5737 |
| 190000 | 0.10634 | 0.10751 | 9.3015 | 3858.1 | 0.9502 | 0.5766 |
| 195000 | 0.10375 | 0.10492 | 9.5310 | 3944.5 | 0.9458 | 0.5794 |
| 200000 | 0.10129 | 0.10246 | 9.7599 | 4030.3 | 0 9416 | 0.5822 |

| $p$ | $t$ | $q$ | $\rho$ | $Apu$ | $r$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200.000 | 211.341 | 215.066 | 408.229 | 47.664 | 455.893 | 670.959 |
| 205.000 | 212.596 | 216 382 | 407.237 | 47.723 | 454.960 | 671.342 |
| 210.000 | 213 828 | 217.675 | 406.262 | 47.781 | 454 043 | 671.718 |
| 215.000 | 215.037 | 218.945 | 405.306 | 47.836 | 453.141 | 672.086 |
| 220.000 | 216.225 | 220.193 | 404.366 | 47.890 | 452.256 | 672.449 |
| 225.000 | 217.393 | 221.420 | 403.442 | 47.943 | 451.385 | 672.805 |
| 230.000 | 218.542 | 222.628 | 402.533 | 47.994 | 450.527 | 673.155 |
| 235.000 | 219.673 | 223.818 | 401.639 | 48.044 | 449.682 | 673.500 |
| 240.000 | 220.787 | 224.990 | 400.757 | 48 093 | 448.850 | 673.840 |
| 245.000 | 221.884 | 226.145 | 399.890 | 48.140 | 448.030 | 674.175 |
| 250.000 | 222.964 | 227.283 | 399.035 | 48.186 | 447.221 | 674.504 |
| 255.000 | 224.028 | 228.405 | 398.194 | 48.230 | 446.424 | 674.829 |
| 260.000 | 225.076 | 229.511 | 397.365 | 48.272 | 445.637 | 675.148 |
| 265.000 | 226.109 | 230.601 | 396.548 | 48.314 | 444.862 | 675.463 |
| 270.000 | 227.127 | 231.675 | 395.743 | 48.356 | 444.099 | 675.774 |
| 275.000 | 228.130 | 232.733 | 394.949 | 48.397 | 443.347 | 676.080 |
| 280.000 | 229.119 | 233.777 | 394.167 | 48.437 | 442.604 | 676.381 |
| 285.000 | 230.094 | 234.807 | 393.396 | 48.476 | 441.872 | 676.679 |

| $p$ | $u$ | $v$ | $\delta$ | $\frac{\rho}{u}$ | $\frac{r}{T}$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200.000 | 0.10129 | 0.10246 | 9.7599 | 4030.3 | 0.9416 | 0.5822 |
| 205.000 | 0.09894 | 0.10012 | 9.9880 | 4116.0 | 0.9376 | 0.5849 |
| 210.000 | 0.09670 | 0.09788 | 10.2166 | 4201.3 | 0.9335 | 0.5875 |
| 215.000 | 0.09456 | 0.09574 | 10.4450 | 4286.2 | 0.9294 | 0.5902 |
| 220.000 | 0.09251 | 0.09369 | 10.6735 | 4371.1 | 0.9255 | 0.5927 |
| 225.000 | 0.09056 | 0.09174 | 10.9004 | 4455.0 | 0.9216 | 0.5953 |
| 230.000 | 0.08869 | 0.08988 | 11.1259 | 4538.6 | 0.9178 | 0.5978 |
| 235.000 | 0.08689 | 0.08808 | 11.3533 | 4622.4 | 0.9140 | 0.6002 |
| 240 000 | 0.08516 | 0.08635 | 11.5808 | 4705.9 | 0.9103 | 0 6027 |
| 245.000 | 0.08351 | 0,08370 | 11.9474 | 4788.5 | 0.9066 | 0.6050 |
| 250.000 | 0.08192 | 0.08311 | 12.0322 | 4871.0 | 0.9030 | 0.6074 |
| 255.000 | 0.08039 | 0.08159 | 12.2564 | 4953.3 | 0.8995 | 0.6097 |
| 260.000 | 0.07891 | 0.08011 | 12.4828 | 5035.7 | 0.8961 | 0.6119 |
| 265.000 | 0.07748 | 0.07868 | 12.8733 | 5118.1 | 0.8927 | 0.6142 |
| 270.000 | 0.07613 | 0.07733 | 12.9316 | 5198.2 | 0.8893 | 0.6163 |
| 275.000 | 0.07481 | 0.07601 | 13.1562 | 5279.3 | 0.8860 | 0.6185 |
| 280.000 | 0.07353 | 0.07473 | 13.3815 | 5360.6 | 0.8828 | 0.6206 |
| 285.000 | 0.07229 | 0 07350 | 13.6054 | 5441.9 | 0.8796 | 0.6227 |

3 0112 061413107